数学リテラシー1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第8回（'25 年 5 月 13 日)

演習問題

問題 1 [行列の対角化 1]
次の行列 A は対角化せよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ (2)\ \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix},\ (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 2 [行列の対角化 2]
次の行列 A を対角化せよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 3 [対称行列の対角化 1]
対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の 2 つ固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

問題 4 [対称行列の対角化 2]
対称行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ。

問題 5 [対称行列の対角化 3]
対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ。

問題 6 [行列の A^n]
次の行列 A の A^n を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},\quad (2) \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

問題 7 [行列の固有値]
2 次の正方行列 A と可逆行列 P に対して $P^{-1}AP$ と A の固有値が等しいことを示せ.

$\boxed{\text{問題 8}}$ [連立漸化式の一般項 1]
次の連立漸化式の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 10y_n, & x_1 = 3 \\ y_{n+1} = -3x_n - 7y_m, & y_1 = 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{問題 9}}$ [連立漸化式の一般項 2]
次の連立漸化式の一般項を求めよ.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n, & x_1 = 1 \\ y_{n+1} = 4x_n - 2y_m, & y_1 = 1. \end{cases}$$

第 7 回の答え

問題 1 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が直交するとする。$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ とする。この時、全体に $\vec{v}_1$ の内積をかけて、$\vec{v}_1 \cdot (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = 0$ であり、左辺を計算することで、$c_1|\vec{v}_1|^2 = 0$ であり、$|\vec{v}_1|^2 \neq 0$ であるから、$c_1 = 0$ となる。よって、$c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ であるから、$c_2 = 0$ となる。故に、$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は一次独立である。

問題 2 (1) $3, 1,\ {}^t(1,1), {}^t(1,0)$, (2) $3, -2,\ {}^t(1,0), {}^t(0,1)$, (3) $2, 0,\ {}^t(1,1), {}^t(-1,1)$,

問題 3 (1) $4, 1,\ {}^t(-1,1), {}^t(2,1)$, (2) $4, -2,\ {}^t(-1,1), {}^t(1,1)$, (3) $5, 1,\ {}^t(3,1), {}^t(-1,1)$,

問題 4 (1) 固有値 $2, 1$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(2) 固有値 $4, -2$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
(3) 固有値 $5, -2$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

問題 5 (1), (2) 教科書の問 3.3.4 と同じなので省略。
(3) 固有値 $-5, 5$, $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

問題 6 A は対称行列であり、対角化できるからある直交行列 P を用いて $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ となり、$A = P(\lambda E)P^{-1} = \lambda E$ となる。

問題 7 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ であるから、$A^n = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\cdot(-2)^n + 3\cdot 5^n & -3(-2)^n + 3\cdot 5^n \\ -4(-2)^n + 4\cdot 5^n & 3(-2)^n + 4\cdot 5^n \end{pmatrix}$

問題 8 上と同様にして $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ であるから、$A^n = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 2(-3)^n + 5 \cdot 4^n & -2(-3)^n + 2 \cdot 4^n \\ -5(-3)^n + 5 \cdot 4^n & 5(-3)^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}$

問題 9 省略。

問題 10 省略。

問題 11 省略。