数学リテラシー1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回（'25年5月16日)

演習問題

$\boxed{\text{問題 1}}$ [20点]

以下の (I), (II) に答えよ。

(I) 以下の問いに答えよ。ただし n は正の整数とする。

(1) 命題「n と $n(n+1)$ のどちらか一方は3の倍数である」の否定命題を作れ。

(2) 命題「n^2+3 は4の倍数ではない、または、n は9以上である」の否定命題を作れ。

(3) (2) で答えた否定命題を満たすような n をすべて求めよ。

(II) 3つの集合 A, B, C をそれぞれ次のように定める。

$$A = \{1, 4, 6\},\ B = \{1, 2, 4\},\ C = \{1, 3, 5\}$$

写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = n^2$ で定める。以下の問いに答えよ。(答えのみでよい)

(1) f が全射であるか否かと単射であるか否かと全単射であるか否かを答えよ。

(2) A の f による増 $f(A)$ と B の f による像 $f(B)$ と、C の f による像 $f(C)$ を、元を列記する表記法で答えよ。

(3) $f(A \setminus B)$ と $f(B \cup C)$ を元を列記する表記法で答えよ。

$\boxed{\text{問題 2}}$ [20点]

以下の (I), (II) に答えよ。

(I) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ が与えられたとする。次に行列 B の候補として、6つの行列

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ B_5 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1) $A+B$ が定義されるものを $B_1, \cdots, B_6$ からすべて選び、それぞれ計算せよ。

(2) AB が定義されるものを $B_1, \cdots, B_6$ からすべて選び、それぞれ計算せよ。

(3) 行列 B_1 は正則か。正則であれば、その逆行列を計算せよ。正則でなければ 0 と記せ。

(II) 写像

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -3x+4y \end{pmatrix}$$

が線形写像であるかどうか理由をつけて答えよ。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [20 点]

2 次正方行列 A による一次変換 $f_A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ により、xy 平面上の 2 点 $(1,0)$, $(0,1)$ はそれぞれ $(1,3)$, $(2,5)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) xy 平面上の点 $(2,3)$ が一次変換 f_A により移される点を求めよ。

(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(4) 一次変換 f_A により点 $(2,3)$ に移される xy 平面上の点を求めよ。

(5) 2 次正方行列 B による一次変換 $f_B:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、まず一次変換 f_A を行い、さらに原点のまわりに反時計回りに θ ラジアンの回転を行う一次変換とする。このとき行列 B の行列式 $\det B$ を求めよ。

$\boxed{\text{問題 4}}$ [20 点]

2 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の各固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ。

(3) 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする。このとき、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$\boxed{\text{問題 5}}$ [20 点]

実数 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を xy 平面上の点を直線 $\ell: y=(\tan\theta)x$ に下ろした垂線の足に移す一次変換 (直線 ℓ への正射影) とし、行列 A を $f=f_A$ を満たす 2 次正方行列とする。ただし、f_A は行列 A による一次変換である。以下の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の 2 点 $B(1,0), C(0,1)$ を写像 f で移した点をそれぞれ B', C' とする。このとき、点 B', C' の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 行列 A を求めよ。

(3) 行列 A の固有値を求めよ。また、各固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ。

(4) 写像 f は単射ではないことを示せ。

第 8 回の答え

問題 1 (1) $P=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ となる。(2) $P=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$ となる。(3) $P=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}&0\\0&2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ となる。

問題 2 (1) $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$ となる。(2) $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ となる。(3) $P=\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$ となる。

問題 3 2 つのベクトルの内積を $\cdot$ によって表すことにする。それ以外の積は行列の積である。縦ベクトル $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ の場合 ${}^t\vec{v}\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}$ であることを注意しておく。$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ を対称行列 A の固有値 λ_1,λ_2 の固有ベクトルとする。

$$ {}^t\vec{v}_1A\vec{v}_2={}^t\vec{v}_1(\lambda_2\vec{v}_2)=\lambda_2({}^t\vec{v}_1\vec{v}_2)=\lambda_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 $$

であり、同様にこの式の転置をとって

$$ {}^t({}^t\vec{v}_1A\vec{v}_2)={}^t\vec{v}_2{}^tA^t({}^t\vec{v}_1)={}^t\vec{v}_2A\vec{v}_1={}^t\vec{v}_2(\lambda_1\vec{v}_1)=\lambda_1{}^t\vec{v}_2\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1=\lambda_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 $$

ゆえに、$\lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$ であるから、$(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$ により、$\lambda_1\neq\lambda_2$ であるから、$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$ がいえる。

問題 4 直交行列を $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-2\end{pmatrix}$ となる。

問題 5 直交行列を $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすることで、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となる。

問題 6 (1) $\begin{pmatrix}2\,3^n-(-2)^n & (-1)^n2^{n+1}-2\,3^n\\ 3^n-(-2)^n & (-1)^n2^{n+1}-3^n\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3^{n+1}-(-1)^n2^{n+1} & 3(-1)^n2^{n+1}-2\,3^{n+1}\\ 3^n-(-2)^n & 3(-2)^n-2\,3^n\end{pmatrix}$

問題 7 $\Phi_{P^{-1}AP}(t)=\det(tE-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}(tE-A)P)=\det(P^{-1})\det(tE-A)\det(P)=\det(tE-A)\det(PP^{-1})=\det(tE-A)=\Phi_A(t)$ より、固有多項式が等しいから固有値が互いに等しい。

問題 8 $\begin{cases}x_n=-25(-2)^{n-1}-28(-1)^n\\ y_n=15(-2)^{n-1}+14(-1)^n\end{cases}$

問題 9 $\begin{cases}x_n=2^{n-1}\\ y_n=2^{n-1}\end{cases}$