

数学リテラシー2

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1,2回 ('25年5月27日)

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 开区間, 閉区間

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ 半开区間

また, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ などの無限区間も使用する.

$\forall$ は「任意の」と読み, $\exists$ は「ある $\sim$ が存在して」と読み, s.t. は, 「 $\sim$ となるような $\dots$ 」と読む.

$A \subset \mathbb{R}$ とする. 実数 M が $\forall a \in A \Rightarrow a \leq M$ を満たすとき, M は A の上界という. 上界が存在するとき, A は上に有界という. M が A の上界であるとき, $A \subset (-\infty, M]$ が成り立つ.

$A \subset \mathbb{R}$ とする. 実数 m が $\forall a \in A \Rightarrow a \geq m$ を満たすとき, m は A の下界といい, 下界が存在するとき, A は下に有界という. m を A の下界であるとき, $A \subset [m, \infty)$ が成り立つ.

$A \subset \mathbb{R}$ が上に有界かつ下に有界であるとき, M, m がそれぞれ A の上界及び下界とすると, $A \subset [m, M]$ であり, このとき A は有界という.

$A \subset \mathbb{R}$ の下界全体の集合を $L(A)$ と書き, A の上界全体の集合を $U(A)$ とかく. つまり,

$$U(A) = \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ は } A \text{ の上界}\}$$

$$L(A) = \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ は } A \text{ の下界}\}$$

(事実) $U(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow A$ は上に有界, かつ $L(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow A$ は下に有界である.

実数の連続性の公理

$A \subset \mathbb{R}$ とする.

$U(A) \neq \emptyset$ なら $U(A)$ は必ず最小値が存在する.

$L(A) \neq \emptyset$ なら $L(A)$ は必ず最大値が存在する.

$U(A) \neq \emptyset$ のとき, $U(A)$ の最小値を A の上限といい, $\sup A$ とかく. $L(A) \neq \emptyset$ のとき, $L(A)$ の最大値を A の下限といい, $\inf A$ とかく.

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在し, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことである. このことを論理記号を用いて表すと,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

や

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

のように書くことができる.

演習問題

問題 1 [全称記号, 存在記号]

次の命題を $\forall, \exists$ を用いて書き直せ。

- (1) 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 > 0$ が成り立つ。
- (2) ある実数 x が存在して $x - x^2 > 0$ となる。
- (3) 任意の正の整数 n に対してある実数係数 n 次多項式 $f(x)$ に対して、ある実数 M が存在して、 M より大きい任意の x に対して $f(x) > 0$ となる。
- (4) (2), (3) に対してそのような実数 x と n 次多項式 $f(x)$ の例をあげよ。

問題 2 [上界, 下界]

π の小数展開に応じて以下の数列のなす集合 $A = \{3, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots\}$ を考える。 $U(A)$ と $L(A)$ を求めよ。

問題 3 [上限, 下限]

2つの区間 A, B を $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) 集合 $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ のそれぞれを求めよ。
- (2) A の上界の集合 $U(A)$ と上限 $\sup A$ を求めよ。
- (3) B の下界の集合 $L(B)$ と下限 $\inf B$ を求めよ。

問題 4 [上限, 下限]

次の集合の上限, 下限を求めよ。

- (1) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3x + 2 < 5\}$
- (2) $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 0\}$
- (3) $C = \{x \in \mathbb{R} | x^3 > 27\}$

問題 5 [上界, 上限, 下限, 下界]

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 1, a_n = \begin{cases} \frac{2a_{n-1} - 1}{3} & n \text{ が奇数} \\ \frac{a_{n-1} + 2}{3} & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定める。集合 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の上限, 下限を求めよ。

問題 6 [上限, 下限]

上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して、最大値 $\max A$ が存在すれば、上限 $\sup A$ に一致することを示せ。

問題 7 [ε - N 論法 1]

以下で与えられる実数列の極限值 α を推測したうえで、 $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < 10^{-2}$ を満たすような自然数 N はいくつ以上であればよいか調べよ。

$$(1) a_n = 2^{-n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$(2) a_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$(3) a_1 = a, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ ただし, } a \text{ は実定数.}$$

問題 8 $[\varepsilon$ - N 論法 2]

実数列

$$a_n = 2 + \frac{1}{n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

$$(1) n \geq N \text{ のとき, } |a_n - 2| < 10^{-4} \text{ を満たすような自然数 } N \text{ を 1 つ求めよ.}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \text{ であることを, } \varepsilon$$
- N 論法を用いて示せ.

問題 9 $[\varepsilon$ - N 論法 3]

$a_n = \frac{1}{n}$ は 0 に収束し、1 に収束しないことを ε - N 論法を用いて示せ.

問題 10 $[\varepsilon$ - N 論法 4]

次の数列 a_n は、任意の ε に対してどれほど大きく自然数 N を取れば $\forall n > N$ に対して $a_n < \varepsilon$ となるか?

$$(1) a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 + e^n}$$

$$(3) a_n = \frac{n^2 + n}{3n^3 + 1}$$

問題 11 $[\varepsilon$ - N 論法 5]

$a_n = \frac{1}{2^n + 3^n}$ は 0 に収束することを示せ.

問題 12 $[\varepsilon$ - N 論法 6]

$a_n = (-1)^n$ はどこにも収束しないことを示せ.

問題 13 $[\varepsilon$ - N 論法 7]

実数列

$$a_n = \frac{3n - 1}{3n + 1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

$$(1) n \geq N \text{ のとき, } |a_n - 1| < 10^{-2} \text{ を満たすような自然数 } N \text{ を 1 つ求めよ.}$$

$$(2) n \geq N \text{ のとき, } |a_n - 1| < 10^{-4} \text{ を満たすような自然数 } N \text{ を 1 つ求めよ.}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ であることを, ε - N 論法を用いて示せ.

問題 14 [ε - N 論法 8]

数列 a_n が α に収束しないこと (α に収束することの否定命題) を論理記号を用いて示せ.

問題 15 [ε - N 論法 9]

正数 $k > 1$ に対して, 以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon). \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (n \geq N_2 \implies |a_n - \alpha| < k\varepsilon). \quad (2)$$

問題 16 [ε - N 論法 10]

以下の命題は同値であることを示せ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon). \quad (3)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (n \geq N_2 \implies |a_n - \alpha| \leq \varepsilon). \quad (4)$$

参考文献

[1] 原 惟行, 松永 秀章, イプシロン・デルタ論法完全攻略, 共立出版, 2011.