第 1,2 回解答

問題 1 (1) $\forall\epsilon\in\mathbb{R}$ に対して $x^2>0$ が成り立つ。

(2) $\exists x\in\mathbb{R}$ に対して $x-x^2>0$ が成り立つ。

(3) $n>0$ を満たす $\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して、実数係数多項式となる $\exists f(x)$ に対して、$\exists M\in\mathbb{R}$ に対して $\forall x>M$ s.t. $f(x)>0$

(4) (2) について $x=1/2$, (3) $f(x)=x^n$

問題 2 $U(A)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq\pi\}$, $L(A)=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 3\}$.

(これに証明を付けるとすると以下のようになる:$\forall\epsilon>0$ に対して $U(A)=[\pi-\epsilon,\infty)$ とすると、$1/\epsilon<10^n$ となる n が存在して、$\pi-10^{-n}<a\in A$ が存在する。実際、$3.a_1a_2\cdots a_n$ が π の小数 n 位までの展開とすると、(例えば $0\leq a_n\leq 8$ なら)$3.a_1a_2\cdots(a_n+1)>\pi$ であるから $a=3.a_1a_2\cdots a_n$ とすると、$a+10^{-n}>\pi$ つまり $\pi-10^{-n}<a$ となる。$a_n=9$ の場合も同様にする。任意の $\epsilon>0$ に対して $U(A)=[\pi+\epsilon,\infty)$ であるとすると、$\pi+\dfrac{\epsilon}{2}$ は A の上界であり、$[\pi+\epsilon,\infty)$ の元ではないので矛盾する。ゆえに、$U(A)=[\pi,\infty)$ である。$L(A)$ の証明も同様である。)

問題 3

(1)$A\setminus B=A\cap B^c=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 0\}$ $B\setminus A=B\cap A^c=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ $A\cap B=\{x\in\mathbb{R}|0<x\leq 1\}$

(2)$U(A)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 1\}=[1,\infty)$, $\sup A=1$

(3)$L(B)=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 0\}=(-\infty,0]$, $\inf B=0$

問題 4

(1) $A=\{x\in\mathbb{R}|x<1\}=(-\infty,1)$, $\sup A=1$, $\inf A=-\infty$

(2) $B=\{0\}$, $\sup B=\inf B=0$

(3) $C=\{x\in\mathbb{R}|x>3\}=(3,\infty)$, $\sup C=\infty$, $\inf C=3$.

問題 5

教科書問 1,3,3 の答えを見よ。

問題 6

$\max A$ は $\forall x\in A$ に対して、$x\leq\max A$ を満たす。よって、$\max A$ は A の上界である。よって、上限の定義から $\sup A\leq\max A$ である。$\sup A$ が A の上界であり、$\max A\in A$ であることから、$\max A\leq\sup A$ である。ゆえに $\max A=\sup A$ である。

(教科書問 1,3,4 の答えも参照せよ)

問題 7

教科書 問 6.3.1 の答えを見よ.

問題 8

教科書 例 6.2.1 の答えを見よ.

問題 9

実数 $\epsilon > 0$ を任意にとる。アルキメデスの原理により $1/\epsilon < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

となる。よって、$a_n \to 0$ となる。
ある実数 $\epsilon = 1/2$ をとる。任意の自然数 N に対して、$n > N$ のとき、

$$|a_n - 1| = 1 - \frac{1}{n} \geq \epsilon = \frac{1}{2}$$

となる。よって、a_n は 1 に収束しない. □

問題 10
(1) $\forall\epsilon > 0$ をとる。アルキメデスの原理により $1/\epsilon < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \epsilon$ である。
(2) $\forall\epsilon > 0$ をとる。$\log\dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{1}{1+e^n} < \dfrac{1}{e^n} < \dfrac{1}{e^N} < \epsilon$ である。
(3) $\forall\epsilon > 0$ をとる。$\dfrac{2}{3\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して $|a_n| = \dfrac{n^2+n}{3n^3+1} < \dfrac{n^2+n^2}{3n^3} = \dfrac{2}{3n} < \dfrac{2}{3N} < \epsilon$ である。

問題 11
実数 $\epsilon > 0$ を任意にとる。ある $\log_2\dfrac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をとる。このとき、$\forall n > N$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{2^n+3^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

となる。よって、$a_n \to 0$ となる。

問題 12
教科書 問 6.3.2 の答えを見よ.

問題 13
(1) 67 (実際は 67 以上の任意の自然数であればよい. 以下も同様).
(2) 667.
(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$N = \max\left\{1, \left\lfloor \frac{2}{3\varepsilon} - \frac{1}{3} \right\rfloor + 1\right\}$$

と選べばよい. ただし $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大の整数とする。

問題 14
ある $\epsilon > 0$ に対して、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対してある $n > N$ が存在して、$|a_n - \alpha| \geq \epsilon$ となる。

問題 15
(1)$\Longrightarrow$(2) を示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, N_2 を $N_2 = N_1$ と選ぶと,

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon < k\varepsilon$$

が成り立つ.

(2)$\Longrightarrow$(1) を示す.

(2) の命題は,

$$\forall \eta > 0,\ \exists N_2(\eta) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_2(\eta) \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k\eta)$$

と書くことができる. ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, η を ε/k と置き直すと, ある自然数 $N_2(\varepsilon/k)$ が決まって,

$$n \geq N_2(\varepsilon/k) \Longrightarrow |a_n - \alpha| < k \cdot \varepsilon/k = \varepsilon$$

が成り立つ. 従って, $N_1 = N_2(\varepsilon/k)$ と選ぶと,

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. $\square$

(N_2 ではなく、$N_2(\eta)$ としているのは整数 N_2 が η に応じて決まっていることを明確にするためにこのように書いている。)

問題 16

(3)$\Longrightarrow$(4) を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,N_2 を $N_2 = N_1$ と定めれば,

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon$$

が成り立つ.

(4)$\Longrightarrow$(3) を示す. (4) の命題は,

$$\forall \eta > 0,\ \exists N_2(\eta) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_2(\eta) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \eta)$$

と書くことができる. ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, η を $\varepsilon/2$ と置き直すと, ある自然数 $N_2(\varepsilon/2)$ が決まって,

$$n \geq N_2(\varepsilon/2) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon/2$$

が成り立つ. 従って, $N_1 = N_2(\varepsilon/2)$ と選ぶと,

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

が成り立つ.