

第3,4回解答

問題1

任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$$

ととれば, $n \geq N$ となる任意の n に対して

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon$$

となる.

問題2

任意の実数 K に対して、ある K が存在して、 $e^K < N$ となる自然数が存在して、 $\forall n > N$ に対して、 $a_n = \log n > \log N > K$ であるから、 $\log n$ は $+\infty$ に発散する.

問題3

教科書の命題 6.4.1 を見よ.

問題4

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ とおく. $|x - 3| < \delta$ となる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon$$

となる. よって、 $\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$ となる.

(2) 始めから $x > 0$ で考えてよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 0$$

とおくと、 $|x - 1| < \delta$ ならば $1 - \delta < x$ であることに注意し、

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \frac{|x - 1|}{x} < \frac{\delta}{1 - \delta} = \varepsilon$$

となる.

(3) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\delta < \min \left\{ \frac{1}{2}, 2\epsilon \right\}$ とすると、 $|x - 1| < \delta$ となる任意の x に対して、 $-\delta + 1 < x < \delta + 1$ より、 $x > \frac{1}{2}$ であるから

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| = \frac{|x+1-2|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}} < \frac{\delta}{2} < \epsilon$$

であるから、 $x \rightarrow 1$ のとき、 $\sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{2}$ がいえる。

(4) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $0 < \delta < \epsilon$ をとる実数 δ をとる. $|x| < \delta$ となる任意の x に対して

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x| < \delta < \epsilon$$

が成り立つので、 $x \rightarrow 0$ の時、 $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ が成り立つ。

(5) $\forall \epsilon > 0$ に対して $0 < \delta < \min \left\{ \frac{1}{2}, 6\epsilon \right\}$ となる実数 δ をとる。このとき、 $|x - 1| < \delta$ となる任意の x に対して、 $1 - \delta < x < 1 + \delta$ より、 $x > \frac{1}{2}$ であるから

$$\left| \frac{x+1}{2x+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x-1}{3(2x+1)} \right| < \frac{\delta}{3(1+1)} = \frac{\delta}{6} < \epsilon$$

となる。よって $\frac{x+1}{2x+1} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow 1)$ がいえる。

問題 5

教科書の問 6.3.3 の解答を見よ。

問題 6

$\frac{1}{|a|} = 1 + b$ とおくと、 b は正の数となる。よって、 $\frac{1}{|a|^n} = (1+b)^n > \frac{n(n-1)b^2}{2}$ となる。 $\forall \epsilon > 0$ に対して、

$$|a_n - 0| = \frac{n}{(1+b)^n} < \frac{2n}{n(n-1)b^2} = \frac{2}{(n-1)b^2} < \frac{2}{(N-1)b^2} < \epsilon$$

を満たし、 a_n は 0 に収束する。

問題 7

(1) 教科書の問 6.3.2 を見よ。

(2) 部分分数分解

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

より、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

が成り立つので、 $n \geq 3$ に対し、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \\ &= 1 + \frac{1}{2^3} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n-1)n} \right\} \\ &< 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

が成り立つから、この数列は上に有界である。単調増加性は明らかなので、この数列はある実数 α に収束する。

参考: この実数 α はアペリー一定数と呼ばれていて、

$$\alpha \approx 1.20205 \dots$$

と続く無理数であることが知られている。

(3) $y = \log x$ とおくとき、§ を用いて $y^2 < 2e^y$ が成り立つので、 $\log x < \sqrt{2x}$ が成り立つ。よって、

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}}{1+2^2} + \frac{\sqrt{3}}{1+3^2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

であり、区分布積法を用いて、 $y = x^{-\frac{3}{2}}$ と比べることにより、 $a_n/\sqrt{2} < \int_1^n x^{-\frac{3}{2}} dx = [-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 2$ となる。よって、 a_n は上界 $2\sqrt{2}$ をもつ。よって a_n は収束する。

問題 8

$\sqrt[n]{n} = a_n = 1 + b_n$ とすると $b_n > 0$ であり、 $n = (1 + b_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$ であるから、 $b_n^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$ であり、 $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \rightarrow 0$ であるから挟み撃ちの原理から $b_n \rightarrow 0$ である。よって $a_n \rightarrow 1$ である。
後半の答えは最後。

問題 9

教科書の問 6.3.4 の解答を見よ。

問題 10

教科書の問 6.3.7 の解答を見よ。

問題 11

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} &= \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdots n} > \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &> \sqrt[n]{\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \geq \sqrt{\frac{n-1}{2}} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

であるから、 $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ が成り立つ。

問題 12

教科書の問 6.3.5 の解答を見よ。

問題 13

教科書の問 6.3.6 の解答を見よ。

問題 14

(1) $x \in \mathbb{Z}$ であるとき、 $f(x) = 0$ だから明らかに $f(-x) = -f(x)$ が成り立つ。 $x \notin \mathbb{Z}$ であるとき、 $f(-x) = -x + \lfloor (-x) \rfloor - \frac{1}{2} = -x + 1 - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = -(x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}) = -f(x)$ が成り立つ。

(2) もし、 $x > 0$ において $x \rightarrow 0$ としたとき、関数は、 $x = 0$ の十分近くで、 $f(x) = x - \frac{1}{2}$ であるから $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ である。また、 $x < 0$ において $x \rightarrow 0$ としたとき、関数は、 $x = 0$ の十分近くで、 $f(x) = x - (-1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ となる。よって、これらは一致しない。

(3) $f(x)$ が $[0, 1]$ 上の関数としたら、これは、上で示したように $f(x) = x - \frac{1}{2}$ であるから、極限値は存在して $-\frac{1}{2}$ となる。

問題 8 の後半の証明

§ から $y > 0$ に対して $y^3 < 6e^y$ が成り立つ。とくに $y = \log n$ とおくと、 $\log n < \sqrt[3]{6n}$ がわかる。

$\sqrt[n]{n^{\log n}} < \sqrt[n]{n^{\sqrt[3]{6n}}} = 1 + b_n$ として、 $b_n \rightarrow 0$ であることを示す。両辺を n 乗して $n^{\sqrt[3]{6n}} = (1 + b_n)^n$ より $n = (1 + b_n)^{\frac{n}{\sqrt[3]{6n}}} = (1 + b_n)^{\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \sqrt[3]{n^2}} > (1 + b_n)^{\frac{1}{2} \sqrt[3]{n^2}}$ であるから、§§ を用いて十分大きい n に対して、

$$n > \frac{\frac{1}{2} \sqrt[3]{n^2} (\frac{1}{2} \sqrt[3]{n^2} - 1)}{2} b_n^2 > \frac{\frac{1}{2} \sqrt[3]{n^2} \frac{1}{4} \sqrt[3]{n^2}}{2} b_n^2 = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{16} b_n^2$$

よって、 $b_n^2 < \frac{16n}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{16}{\sqrt[3]{n}}$ であるから、

$$0 < b_n < \frac{4}{\sqrt[6]{n}} \rightarrow 0$$

より挟み撃ちの原理により $b_n \rightarrow 0$ である。□

以下上で使った不等式を証明しておく。

§: $x > 0$ のとき、不等式 $6e^x > x^3 + 3x^2$ が成り立つ。

(証明)

$f(x) = 6e^x - x^3 - 3x^2$ とおく。 $f'(x) = 6e^x - 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6e^x - 6x - 6$, $f'''(x) = 6e^x - 6 > 0$ である。よって、 $f''(x)$ は単調増加で、 $f''(x) > f''(0) = 6 > 0$ よって $f'(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。従って $f'(x) > f'(0) = 0$ より $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。よって $f(x) > f(0) = 0$ となる。□

§§: $x > 0, y > 2$ のとき、不等式 $(1+x)^y > 1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2}$ が成り立つ。

(証明)

ここで、 $x > 0, y > 2$ であるとき、

$$f(x) = (1+x)^y - \left(1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2}\right)$$

とおくと、 $f(0) = 0$ であり、 $f'(x) = y(1+x)^{y-1} - (y + xy(y-1))$ かつ、

$$f''(x) = y(y-1)(1+x)^{y-2} - y(y-1) = y(y-1)((1+x)^{y-2} - 1) > 0$$

であり、 $f''(x)$ は $x > 0$ で単調増加であるから、 $f''(x) > f''(0) = 0$ よって、 $f'(x)$ は単調増加であり、 $f'(x) > f'(0) = 0$ であるから、 $f(x)$ は単調増加である。よって、 $f(x) > f(0) = 0$ となる。よって、 $x > 0$ かつ $y > 2$ のとき、

$$(1+x)^y > 1 + yx + \frac{y(y-1)x^2}{2}$$

が成り立つ。