

数学リテラシー2

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5,6回 ('25年6月10日)

関数 $f(x)$ が $x = a$ に限りなく近づくとき、 $f(x)$ が α に近づく。これを定義していく。

数列 a_n が存在し、 a_n が a に収束するが、 $f(a_n)$ が α に収束しないとすると、関数 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のときに $f(x) \nrightarrow \alpha$ といえるであろう。(これをあとでちゃんと定義する)

実は以下を示すことができる。

命題 1. 以下は同値

(1) ある数列 a_n があって、 $a_n \rightarrow a$ かつ $f(a_n) \nrightarrow \alpha$ を満たす。

(2) $\exists \epsilon > 0$ に対して $\forall \delta > 0$ に対して、 $|x - a| < \delta$ となるある x に対して $|f(x) - \alpha| \geq \epsilon$ となる。

この (2) の条件の否定が $x \rightarrow a$ のときに $f(x) \rightarrow \alpha$ であることの定義とするのが妥当である。

定義 1. $\forall \epsilon > 0$ と $\exists \delta > 0$ に対して、 $0 < |x - a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ となると、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ となることをいう。

$I \subset \mathbb{R}$ を任意の区間とする。 I 上の関数 f が点 $a \in I$ で連続であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、

$$x \in I \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことである。論理式で書くと、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

となる。関数の極限の定義のときと違って、 $0 < |x - a| < \delta$ ではないことに注意せよ。なぜならば、関数 f は $x = a$ での値が既に定義されているからである。

関数 f が I の各点で連続であるとき、 f は I 上で連続であるという。論理式で書くと、

$$\forall \epsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta > 0, \forall x \in I [|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon] \quad (5)$$

となる。このとき、 δ は ϵ と a に依存して決まっている。

第5回演習問題

Level I

問題 1 [関数の連続性 1]

次の関数が $x = 0$ で連続であることを定義に従って示せ。

(1) $y = e^x$

(2) $y = x^2$

(3) $y = \sin x$

問題 2 [関数の連続性 2]

次の関数が各点で連続であることを定義に従って証明せよ。

$$(1) y = ax$$

$$(2) y = 2x^2 + 1$$

$$(3) y = |x|$$

問題 3 [関数の連続性 3]
実数係数の n 次多項式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad (c_n \neq 0)$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

Level II

問題 4 [関数の連続性 4]
下の関数は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

$$(1) f(x) = \sin x$$

$$(2) g(x) = e^x$$

問題 5 [関数の連続性 5]
関数

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続ではないことを示せ.

Level III

問題 6 [関数の連続性 6]
関数 f は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義され, 関数 g は開区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上定義されているとする. 全ての $x \in I$ に対して $f(x) \in J$ が成り立つとき, 合成関数 $g \circ f$ は I 上で連続であることを示せ.

問題 7 [関数の連続性 7]
関数 f, g は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義された連続関数であるとする. このとき,

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

は区間 I 上で連続であることを示せ.

問題 8 [関数の連続性 8]

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とすると, $y = f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを定義にもとづいて示せ.

問題 9 [関数の連続性 8]

不連続な点を持つ関数の例をあげよ. また, 任意の区間 $I \subset \mathbb{R}$ の全ての点で不連続な関数は存在するか.

発展

(一様連続は範囲ではありません)

区間 I 上の関数 f の連続性の定義 (5) における δ は ε と a に依存していた. これを踏まえて, δ が ε のみに依存する, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I, \forall x \in I [|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon] \quad (6)$$

が成り立つとき, 関数 f は I 上で一様連続であるという. 一様連続ならば連続であるが, 逆は一般に成り立たない.

発展問題

問題 10 [関数の連続性]

関数

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

は $I = [0, \infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

問題 11 [関数の連続性]

関数 f は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で微分可能であり $f'(x)$ が I 上で有界ならば, f は I 上で一様連続であることを示せ.

第 6 回演習問題

Level I

問題 12 [行列式]

3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して, $A = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の行列式を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の内積、外積を用いて表せ. またそのようになることを証明せよ.

問題 13 [外積]

外積 $\vec{x} \times \vec{y}$ について以下が成り立つことを示せ.

$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

問題 14 [内積・外積]

次のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積および外積を求めよ. また, この $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角度 θ について, $|\cos \theta|$ を求めよ.

$$(1) \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問題 15 [平行四辺形の面積]

上の問題のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積を求め、原点、 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ と $\vec{u} + \vec{v}$ で作られる平行四辺形の面積を求めよ。

問題 16 [平行六面体の体積]

次のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ と $\vec{w}$ によって作られる平行六面体の体積を求めよ。[

$$(1) \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Level II

問題 17 [外積の幾何的意味]

空間内のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積の絶対値がその 2 辺を隣あう辺にもつ平行四辺形の面積に等しくなることを 3×3 行列の行列式が平行六面体の体積になることを用いて説明せよ。

問題 18 [空間図形]

3次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して、次を示せ。

$$(1) (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

$$(2) (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0 \quad (\text{ヤコビ恒等式}).$$

問題 19 [四面体の体積]

次の四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

(1) 4つ面のうち、 O を含む 3つの三角形は長さが $1, 1, \sqrt{2}$ とし、角 O が直角となる直角二等辺三角形となるとき。

(2) 長さが全て 1 となる正三角形のとき

Level III

問題 20 $[i$ 列目に他の j 列目の定数倍を足して得られる行列の行列式]

A を $n \times n$ 行列とする。 A の α 列目を $\vec{a}_\alpha$ とする。つまり、 $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_\alpha \cdots \vec{a}_n)$ である。次に、 i 列目として、 $\vec{a}_i$ に他の j 列目 $\vec{a}_j$ の実数倍を足して得られるベクトルとし、 i 列目以外の j 列目を $\vec{a}_j$ のままにして構成された行列を B とする。つまり、 $B = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots (\vec{a}_i + c\vec{a}_j) \cdots \vec{a}_n)$ である。教科書の命題 4.2.3 の多重線形性と命題 4.2.2 を用いて、行列 A と B の行列の行列式は等しいことを示せ。

問題 21 $[2 \times 2$ の行列式の幾何的意味]

A を $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ を用いて $(\vec{a}_1 \vec{a}_2)$ とする。このとき、 $|\det(A)|$ は $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ を結んで得られる平行四辺形の面積であることを上の問題の性質を用いることで、証明せよ。

問題 22 $[3 \times 3$ の行列式の幾何的意味]

A を $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ を用いて $(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)$ とする。このとき、 $|\det(A)|$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ を用いて作られる平行六面体の体積であることを示せ。

ホームページ : <https://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/25/MathLit2.html>

blog : <http://motochans.blogspot.jp/>

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント 1 ページ目上部。