

第 5,6 回解答

問題 1

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \log(\varepsilon + 1)$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して, $|y(x) - y(0)| = |e^x - 1| < |e^\delta - 1| = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = e^x$ は $x = 0$ で連続である.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して, $|y(x) - y(0)| = |x^2 - 0| < |\delta^2| = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = x^2$ は $x = 0$ で連続である.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とすると, $|x - 0| < \delta$ となる任意の x に対して, $|y(x) - y(0)| = |\sin x - 0| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ が成り立つ, すなわち $y = \sin x$ は $x = 0$ で連続である.

問題 2

(1) $a = 0$ の場合, $\forall \varepsilon > 0$ において $\delta = 1$ とすると, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して, $|0 \cdot x - 0 \cdot a| = 0 < \varepsilon$ となり連続となる.

$a \neq 0$ の場合, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ としてとると, $|x - b| < \delta$ となる任意の x に対して, $|ax - ab| = |a(x - b)| < |a|\delta = \varepsilon$ となるから, $y = ax$ は連続である.

(2) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(1 + 2|a|)} \right\}$ としてとると, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して, $|x + a| \leq |x - a| + |2a| < \delta + 2|a| \leq 1 + 2|a|$ となるから $|2x^2 + 1 - 2a^2 - 1| = 2|x - a||x + a| < 2\delta(1 + 2|a|) \leq \varepsilon$ となるから, $y = 2x^2 + 1$ は連続である.

(3) まず, $a \neq 0$ としよう. $\forall \varepsilon > 0$ をとする. $\delta = \{\varepsilon, |a|\}$ としてとる. $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して, $a - \delta < x < a + \delta$ であり, $a > 0$ なら $a - \delta > 0$ であり, $a < 0$ なら $a + \delta < 0$ であるから, x, a は同符号であるから $||x| - |a|| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ となるから, $y = |x|$ は連続である.

次に, $a = 0$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とする. $|x| < \delta = \varepsilon$ より, $y = |x|$ は $x = 0$ で連続である.

問題 3

教科書の問 6.5.1 を見よ.

問題 4

$x = a$ での関数 $y = f(x)$ の連続性を考える. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とするとき, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して,

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| < \delta = \varepsilon$$

となる。(ここで, 不等式 $|\sin X| \leq |X|$ は証明なくもちいた。)

$x = a$ での関数 $y = g(x)$ の連続性を考える. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \log(1 + \varepsilon)$ とする。このとき, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して,

$$|e^x - e^a| = e^a |e^{x-a} - 1| < e^a |x - a| - 1 < e^\delta - 1 = (1 + \varepsilon) - 1 = \varepsilon$$

よって, $x = a$ で連続である。

(ここで, $|e^X - 1| \leq e^{|X|} - 1 \Leftrightarrow -e^{|X|} + 1 \leq e^X - 1 \leq e^{|X|} - 1 \Leftrightarrow -e^{|X|} + 2 \leq e^X \leq e^{|X|}$ となる不等式を用いた。)

問題 5

教科書の問 6.5.5 を見よ.

問題 6

教科書の問 6.5.3 を見よ.

問題 7

教科書の問 6.5.4 を見よ.

問題 8

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ とする. $\forall \delta > 0$ に対して, $\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} < \delta$ となる自然数 n が存在して, $x = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$ とすると, $|x| < \delta$ を満たし, $|f(x) - 0| = \sin \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi = 1 \geq \frac{1}{2}$ を満たすので, $y = f(x)$ は $x = 0$ で連続ではな

い。

問題 9

例えば,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

で定義される関数は $\mathbb{R}$ 上全ての点で不連続である. これはディリクレ関数と呼ばれている.

$a \in I$ とする.

a が有理数であるとする. $\epsilon = \frac{1}{2}$ とする. $\forall \delta > 0$ に対して $|x_0 - a| < \delta$ となる無理数 x_0 が存在する. なぜなら、アルキメデスの公理から $n\delta > 1$ となる自然数 n が存在して、 $\frac{1}{n} < \delta$ である. $x_0 = a + \frac{1}{\sqrt{2}n}$ とおくと、 $|x_0 - a| = \frac{1}{\sqrt{2}n} < \frac{1}{n} < \delta$ が成り立つ. また x_0 は無理数である. もし有理数であるとする、 $\frac{1}{(x_0 - a)n} = \sqrt{2}$ が成り立つ. 左辺は有理数だが、右辺は無理数となり矛盾する. よって、 x_0 は無理数である. 従って $|f(x_0) - f(a)| = |0 - 1| = 1 \geq \frac{1}{2}$ であるから $f(x)$ は任意の有理数で連続ではない.

また、 $a \in I$ が無理数であるとする. $\epsilon = \frac{1}{2}$ とする. $\forall \delta > 0$ に対して、 $|x_0 - a| < \delta$ となる有理数 x_0 が存在する. なぜなら、同様にアルキメデスの公理から $\frac{1}{n} < \delta$ となる自然数 n が存在して、 $[a - \delta, a + \delta]$ において、 $\frac{m}{n}$ なる有理数は必ず存在する. もし存在しないとする. $\frac{k}{n} \leq a - \delta$ となる最大の自然数 k をとると、仮定から $a + \delta \leq \frac{k+1}{n}$ であるが、これから直ちに $2\delta < \frac{1}{n}$ となるが、 $2\delta < \frac{1}{n} < \delta$ となり矛盾する. よって、有理数が $\frac{m}{n}$ の形の有理数が $[a - \delta, a + \delta]$ に存在する. よって、 $|f(x_0) - f(a)| = |1 - 0| = 1 \geq \frac{1}{2}$ であるから a においても不連続. $\square$

問題 10

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = \varepsilon$ と定めると、任意の $a, x \in I$ に対し、

$$|x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = \left| 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ. g に関しても同様.

問題 11

任意の $x, x' \in I$ を $x' < x$ と取っても一般性を失わない. 区間 $[x', x]$ 上でラグランジュの平均値の定理を用いると、

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(c)$$

を満たす $c \in (x', x)$ が存在する. 仮定より $f'(x)$ は I 上で有界なので、

$$|f(x) - f(x')| = |f'(c)| |x - x'| \leq M |x - x'|$$

を満たす正定数 M が存在する. 従って、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = \varepsilon/M$ と定めると、任意の $x, x' \in I$ に対し、

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq M |x - x'| < M\delta = \varepsilon$$

が得られる. 故に、 f は I 上で一様連続である.

問題 12

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおくと、サラスの公式を用い、 c_1, c_2, c_3 についてまとめてみると、

$$\det(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - (a_3 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

問題 13

下の等式は、行列式において、 $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ であることからわかる。また、上の等式は、 $\vec{x} = \vec{y}$ とおいて、 $\vec{x} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{x}$ であることよりわかる。

問題 14

$$(1) 8, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{8}{\sqrt{70}} \quad (2) 12, \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}, \frac{12}{\sqrt{770}} \quad (3) -5, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4) 9, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \frac{9}{\sqrt{182}}$$

問題 15

- (1) $\sqrt{6}$
 (2) $\sqrt{626}$
 (3) $5\sqrt{5}$
 (4) $\sqrt{101}$

問題 16

- (1) 1 (2) 7 (3) 7

問題 17

$$|\det(\vec{u} \vec{v} \vec{x})| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x}| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{x}| \cdot |\cos \theta|$$

であり、左辺は平行六面体の体積であり、 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いた平行四辺形を底面とする。このとき、 $\vec{u} \times \vec{v}$ は、 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の両方に直交するから、 $|\vec{x}| \cdot |\cos \theta|$ はその六面体の高さである。よって、 $\vec{u} \times \vec{v}$ はこの平行六面体の底面の面積である。

問題 18

教科書の問 5.2.1 を見よ。

問題 19

$$(1) \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \quad (2) \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

問題 20

行列式の多重線形性から、

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots (\vec{a}_i + c\vec{a}_j) \cdots \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_n) + c \det(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_n) = \det(A) \end{aligned}$$

問題 21

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とする。 $a_{11} \neq 0$ とし、 $\vec{b} = \vec{a}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする。

$$|\det(\vec{a}_1 \vec{a}_2)| = |\det\left(\vec{a}_1 \left(\vec{a}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\vec{a}_1\right)\right)| = |\det(\vec{a}_1 \vec{b})| = |a_{11}b_2|$$

である。よって、 $a_{11}b_2$ は $\vec{a}_1$ と $\vec{b}$ からなる平行四辺形の面積である。これは $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ からなる平行四辺形の面積になる。 $a_{11} = 0$ とする。このとき、 $|\det(\vec{a}_1 \vec{a}_2)| = |a_{12}a_{21}|$ このとき、同様に $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ からなる面積となる。

問題 22

まず、 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にあるとき、平行六面体の体積は 0 になる。また、 $\det(A) = 0$ となるため、この場合成り立っている。今後 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にないと仮定する。

$\vec{a}_1$ の x 座標が 0 でないとする。もしそうなら $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にないため、 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ のうち x 座標が 0 でないものが存在し、それと交換をする。次に、変形

$$\vec{a}_2 \mapsto \vec{a}_2 + r_1 \vec{a}_1, \quad \vec{a}_3 \mapsto \vec{a}_3 + r_2 \vec{a}_1$$

によって $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ の x 座標を 0 にすることができる。この操作で、底面と高さが変えないので平行六面体の体積を変えない。 $\vec{a}_2$ の y 座標が 0 ではないとする。もし $\vec{a}_2$ の y 座標が 0 とすると $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ を交換させて y 座標が 0 でないものを実現すればよい。もし実現できないとすると $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ は平行となり $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が同一平面上にあることになる。次に、同様の変形を

$$\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_1 + s_1 \vec{a}_2, \quad \vec{a}_3 \mapsto \vec{a}_3 + s_2 \vec{a}_2$$

とすることによって平行六面体の体積を変えずに $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ の y 座標を 0 にすることができる。 $\vec{a}_3$ の z 座標は 0 ではない。なぜなら、もし 0 なら直前の変形前において、 $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ は平行であり、その時点で $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は同一平面上にあり矛盾する。このとき、変形

$$\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_1 + t_1 \vec{a}_3, \quad \vec{a}_2 \mapsto \vec{a}_2 + t_2 \vec{a}_3$$

のように変形しても平行六面体の体積を変えない。これにより、

$$(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = D$$

これにより、平行六面体は縦横高さが $|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|$ の直方体であり体積は $|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = |\det(D)|$ であり、上記の変形が等積変形であったため、行列 A で作られる平行六面体の体積と一致する。また、上記のベクトルの変形によって行列式を変えないので、 $\det(D) = \det(A)$ である。ゆえに $|\det(A)|$ は A のベクトルから作られる平行六面体の体積であることがわかる。