

数学リテラシー2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7,8回 ('25年6月17日)

平面の方程式 $\cdots n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0$ を平面の方程式という。ここで、 (n_1, n_2, n_3) はこの平面の法線ベクトルという。

点と平面との距離 $\cdots (x_1, x_2, x_3)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ への距離は

$$\frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

と計算できる。

直線を表す式 $\cdots (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$ を点 (a_1, a_2, a_3) を通り、方向ベクトル (v_1, v_2, v_3) をもつ直線を表す。

第7,8回演習問題

以下の問題に答えよ。また、以下の問題の類題を各自作って解いてみよ。

Level I

問題 1 [平面の方程式 1]

以下の3点を通る平面の方程式を求めよ。

- (1) $(1, 2, 0), (2, 0, -1), (3, 1, 1)$
- (2) $(1, 1, 1), (0, 1, -2), (2, 3, 3)$

問題 2 [直線の方程式 1]

次の点 P, Q を通る直線の方程式をパラメータ t を用いて表せ。

- (1) $P(-1, 1, 0), Q(2, 1, -3)$
- (2) $P(0, 0, 1), Q(3, -5, -2)$

問題 3 [点から平面までの距離]

点 Q から平面 P への距離を求めよ。

- (1) $P: 3x + 4y + z = 1, Q(1, 1, 1)$
- (2) $P: 5x - y - z = -1, Q(1, -1, -1)$

Level II

問題 4 [平面の方程式 2]

下のベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ のどちらにも平行となる平面のうち原点を通る平面の方程式を求めよ。

(1) $\vec{v}_1 = (2-1, 2), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$

(2) $\vec{v}_1 = (1, 1, -3), \vec{v}_2 = (5, 3, 2)$

問題 5 [点から平面までの距離]

上記問題 (問題 3) において、 Q から P へ下ろした垂線が P と交わる点を求めよ。
(この問題の学習には平面と直線との交点を学んでからでも良い。)

問題 6 [直線の方程式 2]

次の平面 P_1, P_2 の交線として得られる直線の方角ベクトルを求めよ。

(1) $P_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0, P_2 : -x + 5y - 2z = 0$

(2) $P_1 : x - 4y + 3z + 1 = 0, P_2 : x + y + z - 2 = 0$

問題 7 [直線の方程式 3]

上の問題の平面 P_1, P_2 の交線として得られる直線をパラメータ t を用いて記述せよ。

問題 8 [平面の方程式 3]

次の直線 L と点 P を含む平面を求めよ。

(1) $L : (1, 0, 3) + t(1, 1, -5), P(1, 2, 3)$

(2) $L : (-1, 2, 1) + t(8, 2, -3), P(2, 0, -1)$

問題 9 [平面と直線の交点]

以下の問題を解け。

(1) $\mathbb{R}^3$ の点 $P(1, 0, 2)$ を通り、方向ベクトル $(2, 3, -1)$ を持つ直線 ℓ と平面 $H : 2x - y + 3z - 5 = 0$ の交点を求めよ。(問 5.4.1)

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 $P(2, 1, 1)$ を通り、方向ベクトル $(1, 5, -3)$ を持つ直線 ℓ と平面 $H : x + 2y - z - 8 = 0$ の交点を求めよ。

Level III

問題 10 [2 つの直線の間の距離 1]

次の 2 つの直線 ℓ_1, ℓ_2 上の点 P_1, P_2 に対して、その間の距離 $\overline{P_1 P_2}$ の最小を直線の間の距離という。以下の 2 直線において直線の間の距離を求めよ。

(1) $\ell_1 : (1, 1, 1) + t(2, 3, 0), \ell_2 : (-1, 0, 3) + t(1, 1, -1)$

(2) $\ell_1 : (1, 0, 2) + t(3, 5, 1), \ell_2 : (2, 1, 0) + t(4, 3, 0)$

問題 11 [2 つの直線の間の距離 2]

上記問題の 2 直線において直線の間の距離を与える P_1, P_2 を求めよ。

問題 12 [2 つの直線の間の距離 3]

上記問題の最小を与える P_1, P_2 を通る直線は ℓ_1, ℓ_2 のどちらにも直交することを示せ。

問題 13 [球と平面との交わり 1]

球面 $S(A, r)$ を中心 A かつ半径が r の球とする。このとき、 $S(A, r)$ と平面 H との交わりの円の半径を求めよ。

(1) $A(1, 2, -1), r = 2, H : x - y + 2z + 5 = 0$

(2) $A(0, 0, 0), r = 2, H : 2x + y + z - 3 = 0$

(3) $A(1, 5, 3), r = 3, H : 3x - 2y - z - 1 = 0$

問題 14 [球と平面との交わり 2]

上記問題の円の中心を求めよ。

【問題 1】 以下の (I), (II) に答えよ.

(I) 集合 A を

$$A = (0, 1] \cup (2, 3]$$

で定める. 以下の問いに答えよ. ただし, 存在しない場合は「ない」と答えよ. (証明不要)

- (1) A の最大値を求めよ.
- (2) A の最小値を求めよ.
- (3) A の上限を求めよ.
- (4) A の下限を求めよ.

(II) 「任意の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α, β に対し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束しかつ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が β に収束するならば, $\alpha = \beta$ である」という命題の適切な証明となるように, 以下の文の空欄に当てはまる記号をそれぞれ答えよ. ただし同じカタカナが振られた空欄には同じ記号が当てはまる.

証明. α ア β と仮定して矛盾を導く.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left| \alpha \text{ イ } \beta \right|$$

と定める. 仮定より ε ウ 0 である. したがって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することから, ある正整数 N_0 が存在して N_0 以上の任意の整数 n に対し

$$\left| a_n \text{ エ } \text{ オ } \right| \text{ カ } \varepsilon$$

が成り立つ. また同様に, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が β に収束することから, ある正整数 N_1 が存在して N_1 以上の任意の整数 n に対し

$$\left| a_n \text{ エ } \text{ キ } \right| \text{ カ } \varepsilon$$

が成り立つ. ここで $N = \max\{N_0, N_1\}$ と定める. N は N_0 以上の整数であるので,

$$\left| a_N \text{ エ } \text{ ク } \right| \text{ カ } \varepsilon$$

が成り立つ. また N は N_1 以上の整数であるので,

$$\left| a_N \text{ エ } \text{ ケ } \right| \text{ カ } \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, 三角不等式より

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |(a_N - \beta) - (a_N - \alpha)| \text{ コ } |a_N - \beta| + |a_N - \alpha| \text{ サ } \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \\ &= |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

となり矛盾する. 以上より, 背理法により α シ β である.

【問題 2】 2つの空間ベクトル

$$\vec{a} = {}^t(1, 2, 1), \quad \vec{b} = {}^t(-2, 1, -1)$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めよ.
- (2) 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の長さ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ を求めよ.
- (3) xyz 空間内の点 $C(6, 2, -3)$ からベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が張る平面 H に下ろした垂線の足 P の座標を求めよ.
- (4) (3) における 2 点 C , P の間の距離を求めよ.

【問題 3】 xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 直線

$$\ell_1 : -\frac{x}{2} = y = \frac{z+2}{2}, \quad \ell_2 : x-2 = -\frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) 2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 の位置関係（ねじれの位置, 交わる, 平行で一致しない, 一致する）を答えよ. (理由を記述すること.)
- (2) (1) で, 2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 が交わる場合は交点の座標を, その他の場合は 2 直線の間の最小距離を求めよ.