$\boxed{\text{数学リテラシー2}}$

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 9,10 回（'25 年 6 月 24 日）

写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とは 2 変数の実数値関数 $f(x,y)$ のことである．この 2 変数関数 f のグラフ Γ_f を

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

で定義する．次の 2 変数関数は特別に **2 次形式**と呼ばれる:

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

演習問題

Level I

問題 1 [平面と直線のなす角]
以下の問題を解け。

(1) 平面 $H : 2x + y + z = 1$ と直線 $x = 2y + 1 = z - 1$ のなす角の cos を求めよ。

(2) 平面 $H : x + 2y + 3z = -1$ と直線 $2x = y - 2 = z + 1$ のなす角の cos を求めよ。

問題 2 [直線への距離]
以下の問題を解け。

(1) $A(1,0,-1)$ から直線 $x = 2y - 1 = 5z - 1$ への距離を求めよ。

(2) $A(2,1,-3)$ から直線 $-x = y + 1 = 3z$ への距離を求めよ。

問題 3 [2 つの平面の間の距離]
次の 2 つの平行な平面 H_1, H_2 の間の距離を求めよ。

(1) $H_1 : 2x + y - z - 3 = 0$、$H_2 : 2x + y - z - 7 = 0$

(2) $H_1 : x + 2y + z - 1 = 0$、$H_2 : x + 2y + z + 1 = 0$

問題 4 [2 つの直線の間の距離]
次の 2 つの直線の間の距離を求めよ。

(1) $\ell_1 : (2,0,-1) + t(0,1,-2)$ と $\ell_2 : (1,1,1) + t(1,2,-1)$

(2) $\ell_1 : (-3,1,1) + t(2,3,4)$ と $\ell_2 : (0,1,1) + t(2,1,1)$

$\boxed{\text{問題 5}}$ [平面と直線のなす角]
平面 $x + \sqrt{6}y - z + 3 = 0$ と直線 $x - 3 = -y = z$ の成す各 θ を求めよ。

Level II

$\boxed{\text{問題 6}}$ [直線の位置]
次の 2 つの直線の位置関係 (ねじれの位置、交わる、平行で一致しない、一致する) を答えよ。

$$-\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = z - 1 \qquad x = -\frac{y-4}{2} = z + 1$$

$\boxed{\text{問題 7}}$ [2 つの球の共通の円]
球 S_1 を $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ とし、S_2 を $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 4z - 11 = 0$ とする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) S_1 と S_1 の交わりを含む平面の方程式を求めよ。

(2) S_1 と S_2 の交わりの円の半径と中心を求めよ。

$\boxed{\text{問題 8}}$ [空間上の 3 点]
$A(1, 2, -1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) A, B, C を含む平面 H の方程式を求めよ。

(2) 原点より平面 H への距離を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

$\boxed{\text{問題 9}}$ [2 つの円]
2 つの球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z = 6$ がある。

(1) この 2 つの球の交わりの円を含む平面の方程式を求めよ。

(2) この 2 つの球の交わりの円の半径を求めよ。

$\boxed{\text{問題 10}}$ [球面で切り取られる線分]
球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ が直線 $x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ から切り取られる線分の長さが 2 となるように正の数 r を定めよ。

$\boxed{\text{問題 11}}$ [2 つの線分の長さを最小にする座標]
2 点 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ がある。平面 $x + y + z = 0$ 上を点 P が $AP = BP$ を満たしながら動くとき、AP を最小にする点 P の座標を求めよ。

Level III

$\boxed{\text{問題 12}}$ [3 つの平面の交点]
3 つの平面 $2x+3y+z-1=0, x-2y-z-1=0, 3x+2y-z+1=0$ の交点の座標を求めよ。

$\boxed{\text{問題 13}}$ [切り口の面積]
$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ で定まる立方体 V がある。t が $1 < t < 2$ の範囲で動くとき、平面 $x+y+z=t$ による V の切り口の面積を $S(t)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を t で表せ。

(2) $S(t)$ の最大値を求めよ。

【問題 1】 以下の（I），（II）に答えよ．

（I）次の集合を A とする．

$$\left\{ \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

以下の問いに答えよ．ただし，存在しない場合は「ない」と答えよ．（証明不要）

(1) A の上限を求めよ．

(2) A の下限を求めよ．

(3) A の最小値を求めよ．

(4) A の最大値を求めよ．

（II）以下の空欄ア～カに適する選択肢を選んで解答欄に記入せよ．

選択肢

任意の，ある，が存在して，に対して，$< \varepsilon$，$\geq \varepsilon$，奇数，偶数，自然数

数列 $a_n = (-1)^n$ がどんな実数にも収束しないことを示す．このためには，任意の実数 α に対して数列の収束の定義の否定命題である

「ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$\boxed{\text{ア}}$ 自然数 N に対し，$\boxed{\text{イ}}$ $n \geq N$ $\boxed{\text{ウ}}$，$|a_n - \alpha|$ $\boxed{\text{エ}}$」

を示せばよい．そこで $\varepsilon = 1$ とする．まず $\alpha \geq 0$ の場合を考えよう．このとき $\boxed{\text{ア}}$ N に対して，$n \geq N$ となる $\boxed{\text{オ}}$ n を取れば，

$$|a_n - \alpha| = |-1 - \alpha| \geq 1$$

が成り立つため，数列 a_n は α に収束しないことがわかる．次に $\alpha < 0$ の場合を考えよう．このとき $\boxed{\text{ア}}$ N に対して，$n \geq N$ となる $\boxed{\text{カ}}$ n を取れば，

$$|a_n - \alpha| = |1 + (-\alpha)| \geq 1$$

が成り立つため，数列 a_n は α に収束しないことがわかる．いずれの場合にも a_n は α に収束しないので，a_n はどんな実数にも収束しないことが示された．

【**問題 2**】 以下の（I），（II）に答えよ．

（I）以下の数列または関数の極限値を求めよ．ただし，存在しない場合は「ない」と答えよ．（証明不要）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{x^2-9}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\,[x]$．ただし，$[x]$ は x 以下の最大の整数とする．

（II）$I=(0,\infty)$ とする．関数 f が I 上連続であり $f(I)\subset I$ を満たすとし，関数 $g\colon I\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\log_2 f(x)$$

で定義する．以下の証明では，関数 g が点 $a\in I$ で連続であることを示している．空欄ア～カに適切な文字または数式を解答欄に記入せよ．

証明． 任意に正の実数 $\varepsilon>0$ を与える．正の実数 $\delta_0>0$ を

$$\delta_0=f(a)\,\min\left\{\,2^{\varepsilon}-1,\,1-2^{-\varepsilon}\,\right\}$$

で定める．このとき，点 $y\in I$ が $|y-f(a)|<\delta_0$ を満たせば

$$\boxed{\text{ア}}\,\left(2^{-\varepsilon}-1\right)<y-f(a)<\boxed{\text{ア}}\,(2^{\varepsilon}-1)$$

であるので，

$$\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}<\frac{y}{f(a)}<\boxed{\text{イ}}$$

であり，

$$|\log_2 y-\log_2 f(a)\,|=\left|\log_2\boxed{\text{ウ}}\right|<\boxed{\text{エ}}$$

を得る．また，関数 f が点 $a\in I$ で連続であることから，ある正の実数 $\delta>0$ が存在して，点 $x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たせば

$$\left|\boxed{\text{オ}}-f(a)\right|<\boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ．よって，点 $x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たせば

$$|\,g(x)-g(a)\,|=|\log_2 f(x)-\log_2 f(a)\,|<\boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ．したがって，関数 g は点 $a\in I$ で連続である．

【問題 3】 3 個の 3 次元実ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が与えられている．以下の問いに答えよ．ただし，「求めよ」と書かれた問いはスカラーあるいはベクトルのすべての成分の値を示すこと．また，非負ベクトルとはすべての成分が 0 以上の実ベクトルを指す．

(1) ベクトル $\vec{a} = {}^t(1,2,0)$ の長さ $|\vec{a}|$ を求めよ．

(2) ベクトル $\vec{b}$ の第 3 成分はゼロであることがわかっている．$\vec{b} = {}^t(b_1, b_2, 0)$ として前出の $\vec{a}$ との外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を b_1 と b_2 で表せ．

(3) 前出の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積 S は 2 であること，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は非負ベクトルであることがわかっている．外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めよ．

(4) 前出の $\vec{a}, \vec{b}$ と 3 次元実ベクトル $\vec{c}$ が作る平行六面体の体積 V は 6 であること，ベクトル $\vec{c}$ は非負ベクトルであること，また $\vec{c}$ から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平面へ下ろした垂線の足は ${}^t(5,4,0)$ であることがわかっている．ベクトル $\vec{c}$ を求めよ．

【問題 4】 xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある 2 直線 $\ell_1 : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$，$\ell_2 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 直線の位置関係（ねじれの位置, 交わる, 平行で一致しない, 一致する）を答えよ．（理由を記述すること．）

(2) (1) で，交わる場合は交点の座標を，その他の場合は 2 直線間の最小距離を求めよ．

【問題 5】 2 つの球 $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 9$，$S_2 : x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z = 7$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 2 つの球 S_1, S_2 の交わりの円を含む平面を H とするとき, H の方程式は $x+2y-2z+\beta = 0$ で与えられる．β の値を求めよ．

(2) 球 S_1 の中心と平面 H との距離 d の値を求めよ．

(3) 2 つの球 S_1, S_2 の交わりの円の半径 r の値を求めよ．

以上

【問題 1】 以下の（I），（II）に答えよ．

（I）次の集合を A とする．

$$\left\{ \frac{3}{n} + \frac{2}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ かつ } n : m = 2 : 3 \right\}.$$

以下の問いに答えよ．ただし，存在しない場合は「存在しない」と答えよ．（証明不要）

(1) A の上界となる最小の整数を求めよ．

(2) A の上限を求めよ．

(3) A の下限を求めよ．

(4) A の最小値を求めよ．

（II）以下の空欄ア〜オに適する選択肢を選んで解答欄に記入せよ．

選択肢

すべての，ある，が存在して，に対して，有限，有界，max，min

数列 a_n, b_n がそれぞれ実数 α, β に収束するとき，数列 a_nb_n が $\alpha\beta$ に収束することを証明したい．そのために任意の $\varepsilon > 0$ をとり，

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &= |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leq |b_n||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \end{aligned}$$

と変形する．ここで収束する数列は $\boxed{\text{ア}}$ であるという事実から，$\boxed{\text{イ}}$ $M > 0$ に対して，すべての自然数 n で $|b_n| \leq M$ が成り立つ．次に $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の仮定から $\boxed{\text{ウ}}$ 自然数 N_1 に対して，$n \geq N_1$ となる $\boxed{\text{エ}}$ 自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|M|}$ となり，また $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ の仮定から $\boxed{\text{ウ}}$ 自然数 N_2 に対して，$n \geq N_2$ となる $\boxed{\text{エ}}$ 自然数 n に対して $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$ となる．そこで $N = \boxed{\text{オ}}\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ を満たす $\boxed{\text{エ}}$ 自然数 n に対して，

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &< M\frac{\varepsilon}{2|M|} + |\alpha|\frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つため，数列 a_nb_n が $\alpha\beta$ に収束することの定義が確かめられた．

【問題 2】 以下の（I），（II）に答えよ．

（I）以下の数列または関数の極限値を求めよ．（証明不要）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-11x-4}{x^2-16}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

（II）$I=(0,\infty)$ とする．関数 f が I 上連続であり $f(I)\subset I$ を満たすとし，関数 $g\colon I\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\log_{10} f(x)$$

で定義する．以下の証明では，関数 g が点 $a\in I$ で連続であることを示している．空欄ア～カに適切な文字または数式を解答欄に記入せよ．

証明. 任意の正の実数 $\varepsilon>0$ を与える．正の実数 $\delta_0>0$ を

$$\delta_0=f(a)\cdot\min\left\{\,10^{\varepsilon}-1,\ 1-10^{-\varepsilon}\,\right\}$$

で定める．このとき，点 $y\in I$ が $|y-f(a)|<\delta_0$ を満たせば

$$\boxed{\text{ア}}\left(10^{-\varepsilon}-1\right)<y-f(a)<\boxed{\text{ア}}\left(10^{\varepsilon}-1\right)$$

であるので，

$$\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}<\frac{y}{f(a)}<\boxed{\text{イ}}$$

であり，

$$|\log_{10} y-\log_{10} f(a)|=\left|\log_{10}\boxed{\text{ウ}}\right|<\boxed{\text{エ}}$$

を得る．さらに，関数 f が点 $a\in I$ で連続であることから，ある正の実数 $\delta>0$ が存在して，点 $x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たせば

$$\left|\boxed{\text{オ}}-f(a)\right|<\boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ．よって，点 $x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たせば

$$|g(x)-g(a)|=|\log_{10} f(x)-\log_{10} f(a)|<\boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ．したがって，関数 g は点 $a\in I$ で連続である．

【問題 3】 3 個の 3 次元実ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が与えられている．以下の問いに答えよ．ただし，「求めよ」と書かれた問いはスカラーあるいはベクトルのすべての成分の値を示すこと．また，非負ベクトルとはすべての成分が 0 以上の実ベクトルを指す．

(1) ベクトル $\vec{a} = {}^t(1, 2, 2)$ の長さ $|\vec{a}|$ を求めよ．

(2) ベクトル $\vec{b}$ の第 1 成分はゼロであることがわかっている．$\vec{b} = {}^t(0, b_2, b_3)$ として前出の $\vec{a}$ との外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を b_2 と b_3 で表せ．

(3) 前出のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の第 1 成分がゼロであることと，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積 S は $\sqrt{2}$ であること，さらにベクトル $\vec{b}$ は非負ベクトルであることがわかっている．ベクトル $\vec{b}$ を求めよ．

(4) ベクトル $\vec{c} = {}^t(1, 5, c_3)$ であり，しかも $c_3 > 0$ であること，さらに前出のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ とベクトル $\vec{c}$ が作る平行六面体の体積 V が 5 であることがわかっている．c_3 を求めよ．

(5) 前出のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について，ベクトル $\vec{c}$ の終点から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平面へ下ろした垂線の足を求めよ．

【問題 4】 xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある平面 $H : x+2y-2z-1 = 0$ と，球面 $S : (x-2)^2+y^2+(z+1)^2 = 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 つの図形の位置関係（円で交わる，接する（1 点で交わる），交わらない）を答えよ．（理由を記述すること．）

(2) (1) で，円で交わる場合はその円の中心の座標を，接する場合は接点の座標を，交わらない場合は 2 つの図形の間の最小距離を求めよ．

【問題 5】 $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ で定まる立方体 V がある．t が $0 < t \leq 3$ の範囲で動くとき，平面 $x + y + z = t$ による V の切り口の面積を $S(t)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $0 < t \leq 1$ の場合，求めるべき切り口は正三角形でありその一辺の長さは at，そして面積は $S(t) = bt^2$ になる．a, b の値を求めよ．

(2) $1 < t \leq 2$ では $S(t) = -\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，そして $2 < t \leq 3$ では $S(t) = c(t-d)^2$ と表される．c, d の値を求めよ．

以上