

第 9,10 回解答

問題 1

(1) なす角を θ とする。 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{(2, 1, 1) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + 1}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}$ よって、

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{54 - 49}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$$

(2) なす角を θ とする。 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{(1, 2, 3) \cdot (\frac{1}{2}, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{\frac{1}{2^2} + 1 + 1}} = \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{14} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{11}{3\sqrt{14}}$ よって、

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{126 - 121}}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$$

問題 2

(1) この直線をパラメータを用いて表示すると、 $x = 2y - 1 = 5z - 1 = t$ とおくことで $\left(t, \frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{5}\right)$

であるから、 A との距離は、 $\sqrt{(t-1)^2 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t+1}{5} + 1\right)^2} = \frac{1}{10} \sqrt{129t^2 - 102t + 269}$

$= \frac{1}{10} \sqrt{129 \left(t - \frac{51}{129}\right)^2 + \frac{107}{43}}$ となり、この 2 つの直線の距離は、 $\frac{1}{10} \sqrt{\frac{107}{43}}$ となる。

(2) この直線の方角ベクトルは $(3, -3, -1)$ であり、このベクトルを法線ベクトルとし $(2, 1, -3)$ を通る平面は $3x - 3y - z - 6 = 0$ であり、この平面と直線との交点を求めると、 $\left(\frac{9}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{3}{19}\right)$ となる。こ

の点と A との距離を求めると $\sqrt{\frac{314}{19}}$ となる。

問題 3

(1) H_1 と H_2 との原点からの距離を求めると、 $\frac{|-3|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ と $\frac{|-7|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$ となり、原点はこの 2 つの平面において、同じ側にいるので H_1 と H_2 の間の距離は、 $\frac{7}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ となる。

(2) H_1 と H_2 との原点からの距離を求めると、 $\frac{|-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ と $\frac{|1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ となり、原点はこの 2 つの平面において、反対側にいるので H_1 と H_2 の間の距離は、 $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ となる。

問題 4

(1) $(0, 1, -2)$ と $(1, 2, -1)$ の両方に直交するベクトルは、 $(3, -2, -1)$ であり、この方向ベクトルをもち、 $(2, 0, -1)$ と $(1, 1, 1)$ を通る 2 つの平面はそれぞれ、 $3x - 2y - z - 7 = 0$ と $3x - 2y - z = 0$ である。こ

れらの原点からの距離は $\frac{|-7|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ と 0 であるから、この平面の間の距離は $\sqrt{\frac{7}{2}}$ であり、この距離はこの 2 直線の間の距離にもなる。

(2) $(2, 3, 4)$ と $(2, 1, 1)$ の両方に直交するベクトルは、 $(1, -6, 4)$ であり、この方向ベクトルをもち、 $(-3, 1, 1)$ と $(0, 1, 1)$ を通る 2 つの平面はそれぞれ、 $x - 6y + 4z + 5 = 0$ と $x - 6y + 4z + 2 = 0$ である。これらの

原点からの距離は $\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{53}}$ と $\frac{|2|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{53}}$ であり、この 2 つの平面は原点において同じ側にいるので、この 2 つの平面の間の距離は $\frac{3}{\sqrt{53}}$ であり、この距離はこの 2 直線の間の距離にもなる。

問題 5

教科書の問 5.4.6 の解答を参照せよ。

問題 6

教科書の問 5.4.5 の解答を参照せよ。

問題 7

(1) この 2 つの方程式を引くことによって、 $-2x + 2y - 2z + 16 = 0$ が得られる。よって求める方程式は $x - y + z - 8 = 0$ である。

(2) この平面と S_1 との交わりを考えればよい。 S_1 の中心は $(1, -2, 3)$ であるからこの点と (1) で求めた平面との距離は $\frac{|1 + 2 + 3 - 8|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。よって、 S_1 の半径は 3 であるから求める円の半径は、

$\sqrt{3^2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}}$ となる。直線 $(1, -2, 3) + t(1, -1, 1)$ と平面 $x - y + z - 8 = 0$ との交わりを求めると $\left(\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$ となる。この点が S_1 と S_2 の交わりの円の中心である。

問題 8

(1) $\overrightarrow{AB} = (2, -3, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 2)$ であり、これらの法線ベクトルは $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -1, -1)$ であるから、 A, B, C を通る平面の方程式は $-(y - 2) - (z + 1) = 0$ つまり $y + z - 1 = 0$ となる。

(2) 原点からの距離は $\frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

(3) 四面体 $OABC$ の体積は $\frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6}$ と計算できる。

問題 9

教科書 5.4.9 の解答を参照せよ。

問題 10

教科書 5.4.12 の解答を参照せよ。

問題 11

教科書 5.4.10 の解答を参照せよ。

問題 12

教科書 5.4.8 の解答を参照せよ。

問題 13

教科書 5.4.11 の解答を参照せよ。

【問題 1】

- (I) (1) $5/2$
 (2) 2
 (3) ない
 (4) $5/2$
- (II) (ア) 任意の
 (イ) ある
 (ウ) が存在して
 (エ) $\geq \varepsilon$
 (オ) 奇数
 (カ) 偶数

【問題 2】

- (I) (1) $1/2$
 (2) ない
 (3) $11/6$
 (4) 0
- (II) (ア) $f(a)$
 (イ) 2^ε
 (ウ) $y/f(a)$ (または $f(a)/y$)
 (エ) ε
 (オ) $f(x)$
 (カ) δ_0

【問題 3】

- (1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.
- (2) $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, 0, b_2 - 2b_1)$.
- (3) 外積の定義から $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, 0, b_2 - 2b_1)$ となりその長さ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $|b_2 - 2b_1|$, しかも非負ベクトルであるから長さは $b_2 - 2b_1$ である. 一方条件の $S = 2$ より $|\vec{a} \times \vec{b}| = S = 2$ である. よって $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, 0, 2)$ を得る.
- (4) $6 = V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |{}^t(0, 0, 2) \cdot {}^t(c_1, c_2, c_3)| = 2|c_3|$. よって $|c_3| = 3$. $\vec{c}$ が非負ベクトルであることから $c_3 = 3$ を得る. ここで $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, 0, 2)$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平面の法線方向であることから, $\vec{c} = {}^t(5, 4, 3)$ を得る. あるいは $V/S = 3$ より平行六面体の高さが 3 であることを使って導いてもよい.

【問題 4】

- (1) 2 直線上の点はそれぞれ $\ell_1 : (x, y, z) = (t, 2t, -t + 3) \ (t \in \mathbb{R})$, $\ell_2 : (x, y, z) = (2s - 2, 3s + 1, -s) \ (s \in \mathbb{R})$ とパラメーター表示される. 各成分を等置してできる連立方程式 $t = 2s - 2$, $2t = 3s + 1$, $-t + 3 = -s$ がただ一つの解をもつ ($t = 8, s = 5$) ことから, 2 直線は交わる.
- (2) 解 $t = 8 \ (s = 5)$ を直線 $\ell_1 \ (\ell_2)$ のパラメーター表示に代入すれば, 交点の座標は $(8, 16, -5)$.

【問題 5】

- (1) 2 つの球面の交わりの方程式は実数 k を用いて $(x^2 + y^2 + z^2 - 9) + k(x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 7) = 0$ とおける. ここで $k = -1$ とすると, 2 次の項が消えて平面の方程式となる. 整理すると求める方程式は $x + 2y - 2z + 1 = 0$. よって $\beta = 1$.
- (2) 球 S_1 の中心は原点 $(0, 0, 0)$. 原点から平面 $H : x + 2y - 2z + 1 = 0$ までの距離 d は

$$d = \frac{|0 - 0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}.$$

- (3) 球 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ の半径は 3 であるので求めたい交わりの円の半径 r は

$$r = \sqrt{3^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1/3^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

【問題 1】

(I)

- (1) 3
- (2) $13/6$
- (3) 0
- (4) 存在しない

(II)

- (ア) 有界
- (イ) ある
- (ウ) ある
- (エ) すべての
- (オ) $\max$

【問題 2】

(I)

- (1) 0
- (2) 2
- (3) $13/8$
- (4) 0

(II)

- (ア) $f(a)$
- (イ) 10^ε
- (ウ) $y/f(a)$ (または $f(a)/y$)
- (エ) ε
- (オ) $f(x)$
- (カ) δ_0

【問題 3】

- (1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$
- (2) $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(2(b_3 - b_2), -b_3, b_2).$
- (3) $\vec{a} \times \vec{b}$ の第 1 成分がゼロであることから $b_3 = b_2$ を得る. したがって $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, -b_2, b_2)$ となる. よって $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-b_2)^2 + b_2^2} = \sqrt{2}|b_2|$ となる. ここで $S = \sqrt{2}$ を使うと $|b_2| = 1$ となるが, $\vec{b}$ は非負ベクトルであることから $b_2 = 1$ を得る. よって $\vec{b} = {}^t(0, 1, 1).$

(4)

(2) と (3) から $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, -1, 1)$ であるから $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = {}^t(0, -1, 1) \cdot {}^t(1, 5, c_3) = -5 + c_3$ である. この絶対値が平行六面体の体積 $V = 5$ に等しいので $|-5 + c_3| = 5$ を得る. これを満たす c_3 は 0 と 10 であるが, $c_3 > 0$ より, $c_3 = 10$.

(5) $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t(0, -1, 1)$ が問題の平面に直交するので, $0 = {}^t(0, -1, 1) \cdot ({}^t(1, 5, 10) + \alpha {}^t(0, -1, 1))$ を解けばよい. このとき $\alpha = -5/2$ を得るので垂線の足 ${}^t(1, 5, 10) + (-5/2){}^t(0, -1, 1) = {}^t(1, 15/2, 15/2)$ を得る.

【問題 4】

(1) 球面の中心 $(2, 0, -1)$ から平面までの距離は $\frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 1$ で, 球面の半径 1 に等しいことから, 2 つの図形は接する.

(点と平面の距離の公式を用いず, 球面の中心を通り, 平面に直交する直線のパラメーター表示 (以下に記述) を利用して, 中心から平面までの距離を求めてもよい.)

(2) 球面の中心 $(2, 0, -1)$ から平面におろした垂線の足の座標を求めればよい. この中心を通り, 平面の法線ベクトルを方向ベクトルにもつ直線上の点は, $(x, y, z) = (t+2, 2t, -2t-1)$ ($t \in \mathbb{R}$) とパラメーター表示される. 接点が平面上にあることから, $(t+2) + 2(2t) - 2(-2t-1) - 1 = 0$ より $t = -\frac{1}{3}$. 直線のパラメーター表示に代入すれば, 接点の座標は $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

【問題 5】

(1) $0 < t \leq 1$ の場合, 平面 $x + y + z = t$ と x, y, z 平面との切片は t . よって, $S(t)$ の面積は各軸との切片を結んでできる正三角形の面積である. 正三角形の一辺の長さは $\sqrt{2}t$ でありその面積は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2}t \cdot \sqrt{2}t \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$$

よって $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}/2$.

(2)

$2 < t \leq 3$ の場合切り口は再び正三角形. このとき 2 つの頂点 $(1, 1, 0)$ と $(1, 1, 1)$ をつなぐ立方体 V の边上の点を $(1, 1, \alpha)$ として, この点が平面 $x + y + z = t$ 上にあるとすると $\alpha = t - 2$ となる. よって $(1, 1, \alpha)$ と $(1, 1, 1)$ との距離が $1 - (t - 2) = 3 - t$ となることから求めるべき正三角形の一辺の長さは $\sqrt{2}(3 - t)$, そして

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (t - 3)^2$$

よって $c = \sqrt{3}/2, d = 3$.

(別解) $t = 3$ で $S(t) = 0$ となるので $d = 3$. $t = 2$ で

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので $c = \sqrt{3}/2$.