

## 解答例

### 【問題 1】

- (I) (1)  $n$  と  $\frac{n(n+1)}{2}$  のどちらか一方は 4 の倍数ではない.  
(2)  $n^2 + 2$  は 3 の倍数であり, かつ,  $n$  は 7 以下である.  
(3)  $n = 1, 2, 4, 5, 7$ .
- (II) (1) 全射である. 単射でない. 全単射でない.  
(2)  $f(A) = \{0, 2, 4\}$  であり,  $f(B) = \{0, 2, 4\}$  であり,  $f(C) = \{0, 4\}$  である.  
(3)  $f(B \cap C) \neq f(B) \cap f(C)$  であり,  $f(B \cup C) = f(B) \cup f(C)$  である.

### 【問題 2】

- (I) (1)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $BC = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $CD = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $DA = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 12 \end{pmatrix}$ .
- (2) •  $AB$  は正則で, 逆行列は  $(AB)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .  
•  $BC, DA$  は正方行列でない.  $CD$  は正則ではない.
- (II) •  $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は全単射でない.  
実際, 例えば  $f_A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから, 単射でない.
- $f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は全単射である.  
 $\det B = 4 - 6 = -2 \neq 0$  で,  $B$  は正則行列で逆行列  $B^{-1}$  が存在する. 逆写像  $(f_B)^{-1}$  は, 逆行列  $B^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  による線形写像  $f_{B^{-1}}$  である.

### 【問題 3】

- (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (2)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  より, 点  $(1, 8)$  (または  ${}^t(1, 8)$ ).
- (3)  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- (4)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .
- (5)  $\det B = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 18$ .

【問題 4】

(1)  $a = {}^t R$ .

(2) 固有方程式は  $\det(tE_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix} = (t-1)(t-5) = 0$  である. 固有値は 1 と 5 である.

固有値 1 に属する固有ベクトルは  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ( $c_1$  は 0 でない任意の定数) である.

固有値 5 に属する固有ベクトルは  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $c_2$  は 0 でない任意の定数) である.

(3) 長さ 1 の各固有値に属する固有ベクトルを並べて, 直交行列  $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  をつく

る. 対角化は次の通り.  ${}^t R A R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

(4)  $R^{8000} = \underbrace{R R \cdots R}_{8000} = \underbrace{R^8 R^8 \cdots R^8}_{1000}$  であり,

$R^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$  だから,  $R^{8000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$  である.

なお, 直交行列  $R$  の取り方には任意性があるが, 2 次直交行列なので鏡映か回転である. 鏡映なら 2 乗で単位行列, 回転の場合は上記のように 8 乗で単位行列である.