解答例

【問題 5】

(I) (1) n と $n(n+3)$ はともに 4 の倍数ではない．

(2) n^2+2n は 5 の倍数ではなく，かつ，n は 8 以下である．

(3) $n=1,2,4,6,7$

(II) (1) 全射でない．単射である．全単射でない．

(2) $f(B)=\{2,10,37\}$ であり，$f(C)=\{2,5,17\}$ であり，$f(A\setminus B)=\{5,17,26\}$ である．

(3) $A\setminus f(C)=\{1,3,4,6\}$ であり，$f(B)\cap C=\{2\}$ である．

【問題 6】

(I) (1) B_2 のみが $2A+B$ を定義することができ，$2A+B_2=\begin{pmatrix}5 & 8 & -2\\ 6 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

(2) B_2, B_4, B_6 が AB を定義することができ，

$AB_2=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -12 & -14\end{pmatrix}$，$AB_4=\begin{pmatrix}6\\ 13\end{pmatrix}$，$AB_6=\begin{pmatrix}0 & 4 & 16\\ 23 & -1 & 25\end{pmatrix}$.

(3) B_1 は正則であり，逆行列 ${B_1}^{-1}$ は ${B_1}^{-1}=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

(II) 写像 f は線形写像ではない．実際，あるベクトル $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}$ が存在して $f(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})\neq f(\overrightarrow{x_1})+f(\overrightarrow{x_2})$ を満たすこと，またはある実数 c とベクトル $\overrightarrow{x_1}$ が存在して $f(c\overrightarrow{x_1})\neq cf(\overrightarrow{x_1})$ を満たすことが確認されていれば良い．

【問題 7】

(1) $B=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ より，

$$B=\begin{pmatrix}a(1-\cos 2\theta)+b\sin 2\theta+c & a\sin 2\theta+b\cos 2\theta\\ a\sin 2\theta+b\cos 2\theta & a(1-\cos 2\theta)-b\sin 2\theta+c\end{pmatrix}.$$

(2) (1) の計算より，

$$\det B=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}(\det A)\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=(2a+c)c-b^2.$$

(3) $a^2+b^2\neq 0$ であるとき，$a\sin 2\theta+b\cos 2\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2\theta+\alpha)$ より，行列 B が対角行列であれば，$\sin(2\theta+\alpha)=0$ を得る．よって，$\theta=\dfrac{n\pi-\alpha}{2}$ （ただし n は整数）である．

(4) $a^2+b^2\neq 0$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
b\sin 2\theta - a\cos 2\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin 2\theta - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos 2\theta\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\sin 2\theta - \cos\alpha\cos 2\theta) = -\sqrt{a^2+b^2}\cos(2\theta+\alpha),\\
-b\sin 2\theta + a\cos 2\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin 2\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos 2\theta\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,(-\sin\alpha\sin 2\theta + \cos\alpha\cos 2\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(2\theta+\alpha)
\end{aligned}$$

を満たす．行列 B が対角行列であれば，(3) より $\theta=\dfrac{n\pi-\alpha}{2}$ （ただし n は整数）であるので，行列 B の $(1,1)$ 成分を b_{11} とし，$(2,2)$ 成分を b_{22} とするとすると，

$$\begin{aligned}
b_{11} &= a+c+b\sin 2\theta - a\cos 2\theta = a+c-\sqrt{a^2+b^2}\cos(2\theta+\alpha)\\
&= a+c-\sqrt{a^2+b^2}\cos n\pi = a+c+(-1)^{n+1}\sqrt{a^2+b^2},\\
b_{22} &= a+c+(-b\sin 2\theta + a\cos 2\theta) = a+c+\sqrt{a^2+b^2}\cos(2\theta+\alpha)\\
&= a+c+\sqrt{a^2+b^2}\cos n\pi = a+c-(-1)^{n+1}\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

を満たす．したがって，次を得る．

$$B=\begin{pmatrix} a+c+(-1)^{n+1}\sqrt{a^2+b^2} & 0\\ 0 & a+c-(-1)^{n+1}\sqrt{a^2+b^2}\end{pmatrix},\quad \text{（ただし，}n\text{ は整数）}.$$

【問題 8】

(1) A の固有方程式は

$$\det(tE_2-A)=\det\begin{pmatrix} t-2 & -3\\ -3 & t-2\end{pmatrix}=(t-5)(t+1)=0$$

である．よって，A の固有値は 5 と -1 である．

(2)
- A の固有値 5 に属する固有ベクトル $\overrightarrow{w}={}^t(w_1,w_2)$ は，

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(5E_2-A)\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}3w_1-3w_2\\-3w_1+3w_2\end{pmatrix}$$

  を満たす．この方程式を満たす長さ 1 のベクトルとして，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を選べる．
- A の固有値 -1 に属する固有ベクトル $\overrightarrow{w}={}^t(w_1,w_2)$ は，

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(-E_2-A)\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}-3w_1-3w_2\\-3w_1-3w_2\end{pmatrix}$$

  を満たす．この方程式を満たす長さ 1 のベクトルとして，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を選べる．

(3) 行列の対角化を利用する．(2) より，2 次正方行列 R を $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定め，2 次対角行列 D を $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で定めると，行列 A は ${}^tRAR = D$ を満たし対角化できる．特に，${}^tR$ は正則であり逆行列 R をもつことに注意すると，$A = RDR^{-1}$ を満たす．すべての自然数 n に対して，$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ であるので，

$$\begin{aligned} A^n &= RD^nR^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n + (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n \\ 5^n \end{pmatrix}$$

を得る．よって，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項はそれぞれ $a_n = 5^{n-1}$，$b_n = 5^{n-1}$ である．あるいは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を推測した上で数学的帰納法を用いて示しても良い．

【問題 9】

(1) ${}^tAA = E_2$ より A は直交行列であり，${}^tBB = E_2$ より B は直交行列である．

(2) A の固有方程式 $\det(tE_2 - A) = 0$ の解は，

$$\det(tE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} t - \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & t + \cos\alpha \end{pmatrix} = (t-1)(t+1)$$

より，$1, -1$ である．よって，A の固有値は $1, -1$ である．

(3) A の固有値に属する固有ベクトルは $\overrightarrow{v_2}$ と $\overrightarrow{v_4}$ である．

- A の固有値 1 に属する固有ベクトル $\overrightarrow{w} = {}^t(w_1, w_1)$ は，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (E_2 - A)\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 - \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1 + \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

を満たす．この方程式を満たすベクトルは，$0 < \alpha < \pi$ であることに注意すると，$\overrightarrow{v_2}$ に限ることがわかる．

- A の固有値 -1 に属する固有ベクトル $\overrightarrow{w} = {}^t(w_1, w_1)$ は，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-E_2 - A)\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 - \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -1 + \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

を満たす．この方程式を満たすベクトルは，$0 < \alpha < \pi$ であることに注意すると，$\overrightarrow{v_4}$ に限ることがわかる．

(4) 行列 BA について，$BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ が成り立つ．よって，(2) と同様に BA の固有値は $1, -1$ である．

(5) 行列 BA について，$BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ が成り立つ．よって，(3) と同様に考えると，固有値 1 に属する固有ベクトルとして

$$ {}^t\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) $$

を選ぶことができ，固有値 -1 に属する固有ベクトルとして

$$ {}^t\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) $$

を選ぶことができる．

以上