

幾何学分野紹介

幾何グループ

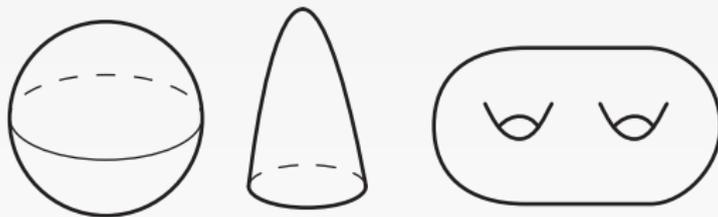
丹下 基生

筑波大学大学院数理物質系数域

2014年5月10日

§.1 位相幾何と微分幾何

幾何図形（多様体）



2種類の幾何学に分けられる．

① 位相的な 繋がり方 のみ気にする．

⇒ **位相幾何学**

② 位相的な繋がり方と 曲がり方 まで気にする．

⇒ **微分幾何学**

(1) 位相幾何

長さを無視して連続変形しても同じもの .

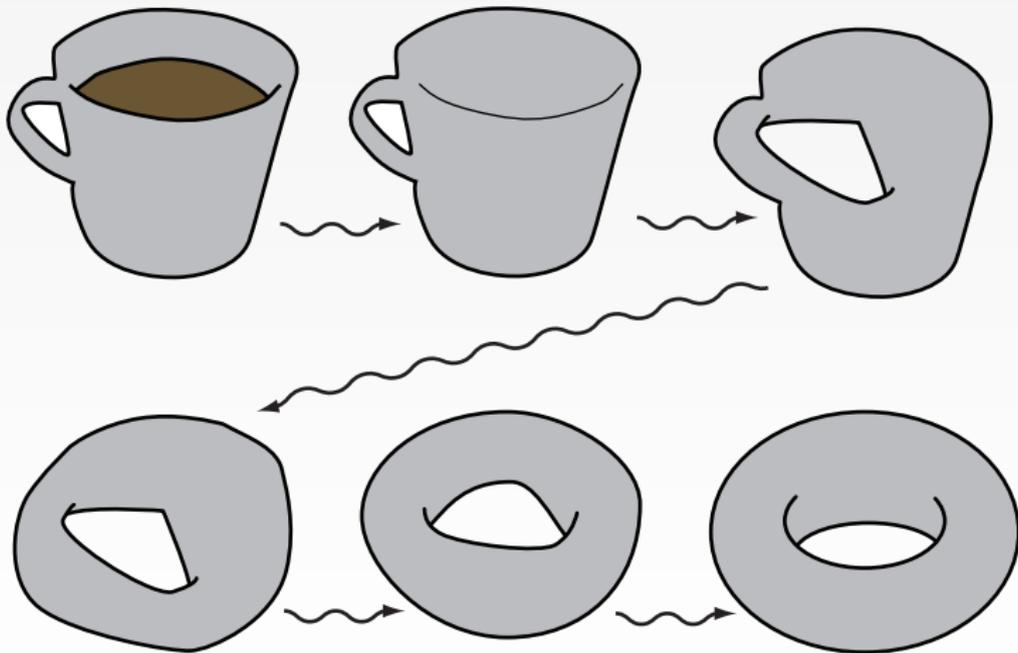


Figure: コーヒーカップとドーナツの同相性 .

(2) 微分幾何

本質的なもの

- **リーマン計量 (第一基本形式)** g
2点間の距離や角度を測る.
- **測地線**
直線を引く.
- **曲率** K
曲がり方.

曲がり方がわかれば、対象全体がどんな形分かる
⇒ 大域解析学が発展.

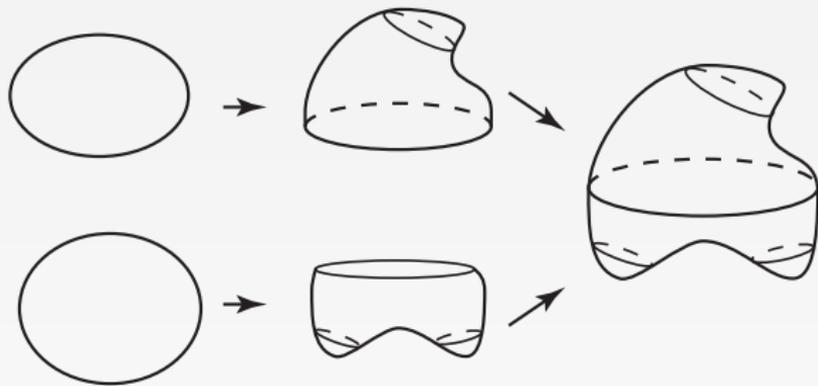


Figure: 球の位相幾何的作り方 .

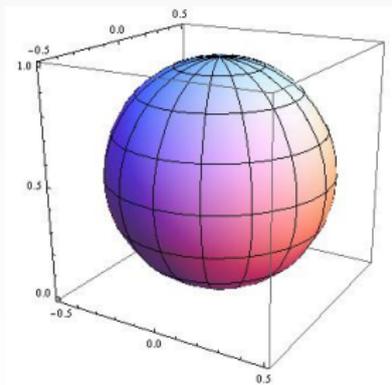


Figure: 球の微分幾何的作り方 .

微分幾何 \Leftrightarrow 位相幾何

位相幾何



$$\chi(S) = (\text{点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

微分幾何

g : リーマン計量、第一基本形式
 K : 曲率

同じ幾何学なのに雰囲気が違う...

微分幾何 \Leftrightarrow 位相幾何

幾何では以下のような等式が美しい

学類で習うガウスボンネの定理

$$\int_S K d\mu = 2\pi\chi(S)$$

微分幾何的データが位相幾何的分野を復元している．最近の、幾何学の発展は？

100万ドル懸賞金問題

クレイ数学研究所が出した7つの懸賞金問題のうちの1つ。

ポアンカレ予想

単連結な閉3次元多様体 \Rightarrow 球面と同相である。

位相幾何の言葉だけで書かれている。
当然位相幾何の言葉で解けると信じられていた。

簡単そうに見えるが、100年の間どのトポロジストも解けなかった。

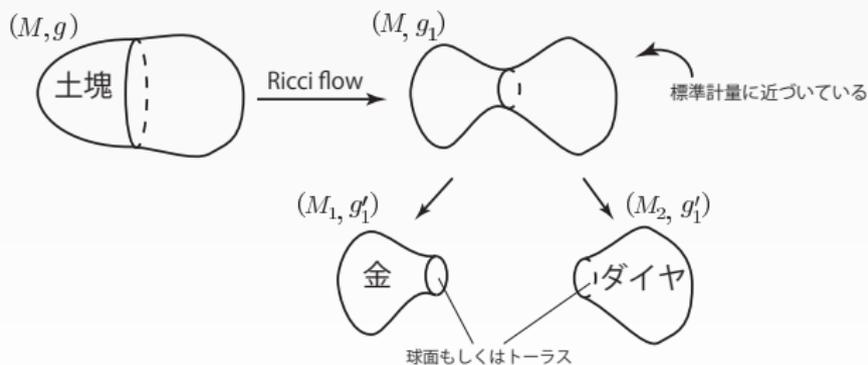
80年代、この問題に対して壮大なプログラムを作った人がいた！

ハミルトンプログラム

スローガン

任意の3次元多様体に計量を入れ、リッチフローで計量を動かして標準計量まで持っていこう！

どんな土塊でもゆすっていけばダイヤモンドや金（標準計量のこと）が見えるはず。（幾何化）



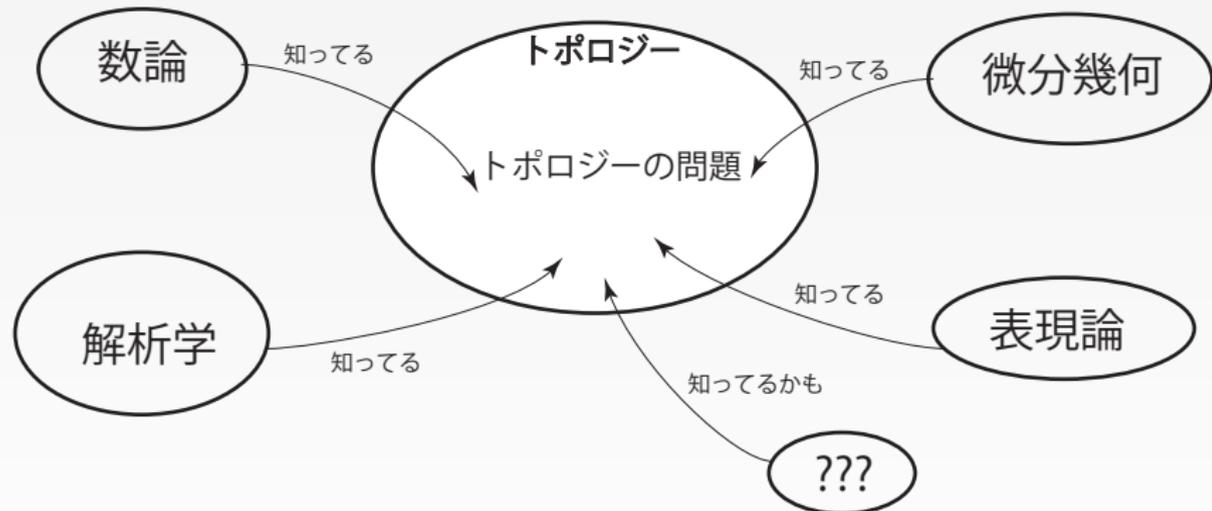
ペレルマンがプログラムを実行し肯定的に解決 (2002,2003)
驚くべきことに、3次元多様体全体を位相的に分類する形で !!

研究において面白いのは....

2つの分野が交わったときである。

(もちろん、いくつかの分野が重なったときもそうだが...)

近くて見えぬはまつ毛



頑張れば...

あなたももしかしたら有名問題の解答者になれるかも?100万ドルも夢ではない?!

授賞式では筑波大学でお世話になったとの謝辞をいただくと幸いです。

幾何の研究に向いている人

次のいずれかに当てはまるひと

- ① 論理より、直感を大事にするひと。
- ② 図形の問題が得意。
- ③ 問題をグラフなど可視化して解くことができるひと。
- ④ 補助線を見つける作業が苦にならないひと。
- ⑤ 幾何的デザインを美しいと感じるひと。
- ⑥ 図や絵を綺麗に書ける人。
- ⑦ 石ころ集めとその分類が好きなひと。

論理的な作業をしなくてよいというわけでは決してありません。

(実際、大事なところは...)

幾何的直観も大事だが、異なる分野をいかにセンス良く結びつけられるかが鍵。

§.2 幾何の研究分野

および、先生の専門分野

幾何グループの構成員

位相幾何分野

加藤 久男 教授

幾何学的トポロジー・位相力学系理論

川村 一宏 教授

幾何学的トポロジー・距離の幾何学・位相幾何学的組み合わせ論

平山 至大 准教授

力学系理論、エルゴード理論

石井 敦 講師

低次元トポロジー、結び目理論

丹下 基生 助教

低次元位相幾何

院生：前期 3 人、後期 1 人

微分幾何分野

田崎 博之 准教授

等質空間の微分幾何学と積分幾何学

相山 玲子 講師

曲面および部分多様体の微分幾何的研究

永野 幸一 講師

大域リーマン幾何学および距離空間の幾何学

守屋 克洋 助教

四元数的ベクトル束上の正則構造と平坦接続

院生：前期 5 人、後期 4 人

一般トポロジー

世にも不思議な空間が存在する

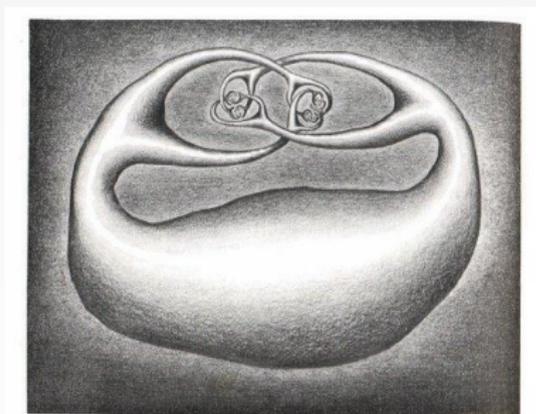
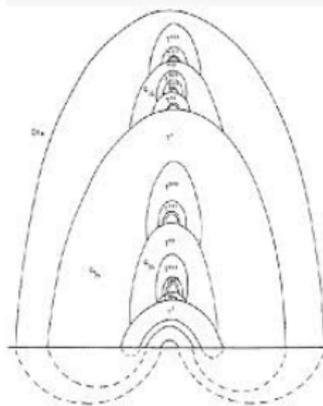


FIG. 4-11. The Alexander horned sphere.



このような野性的な空間に魅力を感じたら一般トポロジーの世界へ（加藤先生、川村先生、平山先生）

微分トポロジー、低次元トポロジー

多様体、結び目

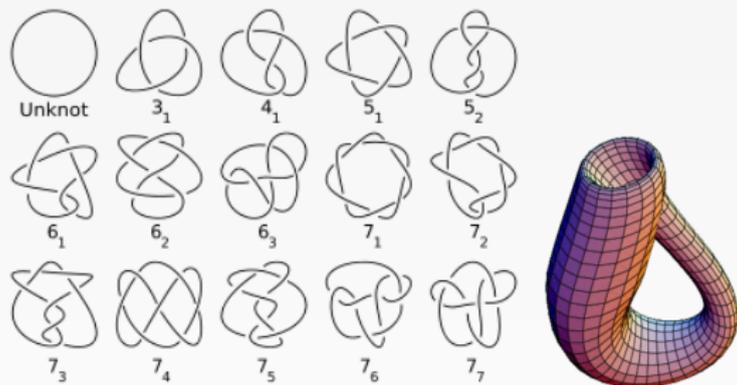


Figure: 結び目の分類表とクラインの壺

多様体など、滑らかで閉じているような空間が好きなら低次元、
結び目の世界へ（平山先生、石井先生、丹下）
実際は、とっつきやすい分、こちらの方が奥が深かったりする....

平山先生は...

力学系、エルゴード理論

他分野融合系

詳しくは研究室訪問がよいでしょう。

① **部分多様体の幾何学** (3) **きれいに入っている空間が見たい!**

対称空間、曲面論、極小曲面 (田崎先生、相山先生、守屋先生)

② **リーマン幾何学** (1) **計量と曲率がすべて!**

幾何解析、ラプラシアン of 幾何学、測地線の幾何学、調和写像、リッチフロー、アレクサンドロフ空間 (永野先生)

筑波大の先生方は

- ① 優しく指導してくれる．
- ② 親身になって相談にのってくれる．
- ③ 自分の専門分野を愛している．

進学希望者にワンポイントアドバイス

- まずは、線形代数と微積分
- 位相幾何学の分野で研究をするには
「集合と位相の基本事項」
を学んでいることが望ましい。
- 微分幾何の分野で研究をするためには
「曲線と曲面の幾何」および「多様体の基本事項」
を学んでいることが望ましい。

ご清聴ありがとうございました。

図形や空間の性質に興味のある皆さん

幾何学の勉強・研究を本格的に始めませんか。

頑張って、未知なる領域を開拓しましょう。

幾何グループ