

ホモロジー 3 球面から得られるレンズ空間たち について II

丹下 基生

大阪大学大学院理学研究科

概要

前回での結び目のトポロジーではデーン手術によって $\Sigma(2, 3, 5)$ から多くのレンズ空間が得られることが示された。そのレンズ空間たちが S^3 の場合に Berge [1] によって予想されているような quadratic family の系列として現れる。またその系列はある場合にレンズ空間を得る $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ の中の結び目に拡張される。これを用いることでレンズ空間を得る $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ の中の結び目の位置を決定する。

1 序

3次元多様体 Y 内の結び目 K の整数 Dehn surgery によってレンズ空間が得られるとき Y のレンズ空間手術という。また knot $K \subset Y$ の p -Dehn surgery を $Y_p(K)$ で表す。また同じレンズ空間を得ても dual knot $K^* \subset Y_p(K)$ のレンズ空間の homology class が違うとき、異なる手術とみなす。また2つの手術でできた dual knot の homology class が同じときそれらを同等な手術ということにする。 $Y_p(K)$ 内の knot には tilde をつけ、 Y 内の knot には tilde をつけないものとして書く。

1.1 ホモロジー球面を生むレンズ空間内の手術

まず R.Fintushel と R.Stern による次の結果を紹介する。ここでレンズ空間 $L(p, q)$ を S^3 の自明結び目に沿った $\frac{p}{q}$ -surgery として定義する。これはよく知られた向きと逆であることを注意する。

定理 1.1 (Fintushel-Stern[2]) $L(p, q)$ があるホモロジー球面内の結び目の正整数手術から得られるための必要十分条件は q がある整数の 2 乗に $\text{mod } p$ で合同であることである。

この結果の後 $x^2 = q \pmod{p}$ に対する x に対してどのようなホモロジー球面と結び目が存在するのかを考える問題が残る。しかしそのようなホモロジー球面は一意的ではない (1.4

表 1: $\Sigma(2, 3, 6 \pm 1)$ を生み出す simple knot \tilde{K} による手術 ($g'(\tilde{K}) := 2g(\tilde{K}) - p - 1 \neq 0$)

	$L(p, q)$	$g'(\tilde{K})$
A_1	$L((4\ell + 1)^2 \pm (2\ell^2 + \ell), ((8 \pm 1)\ell + 2)^2)$	$\pm \ell $
A_2	$L((5\ell + 2)^2 \pm (5\ell^2 + 5\ell + 1), (5\ell + 2)^2)$	$\pm \ell $
B	$L((6\ell + 1)^2 \pm (6\ell^2 + 3\ell), (6\ell + 1)^2)$	$\pm \ell $
C_1	$L((7\ell + 2)^2 \pm (7\ell^2 + 5\ell + 1), (7\ell + 2)^2)$	$\pm \ell $
C_2	$L((7\ell + 3)^2 \pm (7\ell^2 + 5\ell + 1), (7\ell + 3)^2)$	$\pm \ell + 1 $
D_1	$L((8\ell + 1)^2 \pm (12\ell^2 + \ell), ((16 \pm 3)\ell + 2)^2)$	$\pm \ell $
D_2	$L((8\ell + 3)^2 \pm (12\ell^2 + 7\ell + 1), ((16 \pm 3)\ell + 6 \pm 1)^2)$	$\pm \ell + 1 $
E_1	$L((8\ell + 1)^2 \pm (10\ell^2 + \ell), ((32 \pm 5)\ell + 4)^2)$	$\pm \ell $
E_2	$L((8\ell + 3)^2 \pm (10\ell^2 + 9\ell + 2), ((32 \pm 5)\ell + 12 \pm 2)^2)$	$\pm \ell $
F_1	$L((9\ell + 1)^2 \pm (12\ell^2 + \ell), ((27 \pm 4)\ell + 3)^2)$	$\pm 2\ell $
F_2	$L((9\ell + 2)^2 \pm (12\ell^2 + 7\ell + 1), ((27 \pm 4)\ell + 6 \pm 1)^2)$	$\pm 2\ell $
G_1	$L((10\ell + 1)^2 \pm (15\ell^2 + \ell), ((20 \pm 3)\ell + 2)^2)$	$\pm 2\ell $
G_2	$L((10\ell + 3)^2 \pm (15\ell^2 + 11\ell + 2), ((20 \pm 3)\ell + 6 \pm 1)^2)$	$\pm 2\ell $
H_1	$L((11\ell + 2)^2 \pm (22\ell^2 + 9\ell + 1), (11\ell + 2)^2)$	$\pm 2\ell $
H_2	$L((11\ell + 3)^2 \pm (22\ell^2 + 13\ell + 2), (11\ell + 3)^2)$	$\pm 2\ell $
I_1	$L((12\ell + 1)^2 \pm (24\ell^2 + 8\ell), (12\ell + 1)^2)$	$\pm 2\ell $
I_2	$L((12\ell + 2)^2 \pm (24\ell^2 + 12\ell + 1), (12\ell + 2)^2)$	$\pm 2\ell $
I_3	$L((12\ell + 1)^2 \pm (24\ell^2 + 4\ell), ((24 \pm 4)\ell + 2)^2)$	$\pm 2\ell $
J	$L((12\ell + 5)^2 \pm (24\ell^2 + 16\ell + 3), (12\ell + 5)^2)$	$\pm 2\ell + 1 $
K	$L(15^2 \pm 34, 15^2)$	± 2

参照)。そこで simple という条件を満たす結び目だけ考える。 $L(p, q)$ のあるホモロジー類を代表する結び目の中で simple という性質を満たすものが重要な役割を果たす。

定義 1.1 $L(p, q)$ の種数 1 の Heegaard splitting をとりその 2 つの meridian disk を D_i ($i = 1, 2$) とする。このとき D_i の中に埋め込まれた arc a_i でその端点のみが ∂D_i と transverse に交わるものを考える。 $L(p, q)$ の中の結び目 \tilde{K} が simple とはそのような a_1 と a_2 の union として実現できる結び目のことをいう。

一般に simple knot はその homology class ごとに isotopy を除いて唯一存在する。また Berge 予想とは S^3 から得られるレンズ空間手術では同等な手術は simple なものに尽きることを用いる。前回の集会では $L(p, q)$ の中の simple knot から $\Sigma(2, 3, 5)$ が得られるものを $p \leq 1500$ まで計算したものを発表させていただいた。それを quadratic family としてまとめると上の表 1 のようになる [9]。表 1 は $p \leq 2007$ までのレンズ空間の中に入る全ての simple knot の中で $\Sigma(2, 3, 5)$ を得るものを全て含むような列である。また向きは $\Sigma(2, 3, 5)$ の標準的な向きをとり正の手術しか考えない。標準的な向きで負の手術によりレンズ空間を生じることはないことは [10] で示されている。一般に向きを逆向きにする位相同型がないホモロジー球面に対して、デーモン手術によって一方の向きしかレンズ空間が得られないのかどうかはいまのところわからない。表 1 の分類は今わかっている中で暫定的なものにすぎない。また $\Sigma(2, 3, 7)$ も同じように得ることができる。表 1 では

複合同順に従う。スーパーコンピュータなどを用いてさらに計算を進めることは必要である。そのとき更なる列が現れる可能性は大いにある。次に主結果を述べる。

定理 1.2 表 1 の A_1, A_2 に対する $\Sigma(2, 3, 5)$ を生み出すレンズ空間の中の *simple knot* の *dual knot* K はそれぞれ図 1, 2 のようになる。つまり結び目 K の整数手術は A_1, A_2 の *type* のレンズ空間を生み出す。ここで、点線は } で表した部分が ℓ 回の図のような巻きつきになるような省略を表す。また K の *framing* $-\ell$ はそれによってレンズ空間が得られることを指す。



図 1: type A_1 のレンズ空間を生む knot K 図 2: type A_2 のレンズ空間を生む knot K

定理 1.3 表 1 の B に対する $\Sigma(2, 3, 5)$ を生み出すレンズ空間の中の *simple knot* を $\Sigma(2, 3, 5)$ の中で描くと下のようになる。つまり結び目 K の整数手術は B の *type* のレンズ空間を生み出す。ここで $-\ell$ の *box* は $-\ell$ 回の *positive full twist* を表す。

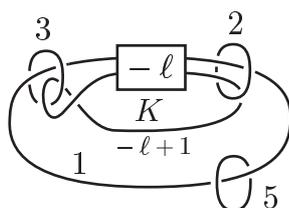


図 3: type B のレンズ空間を生む knot K

$\Sigma(2, 3, 7)$ に対しても同様の図式である。そのときも向きは $\Sigma(2, 3, 7)$ の通常の向きである。また A_1, A_2, B 以外の結び目も今回の方法を踏襲することによってわかるはずである。



図 4: 一般化された type A

図 5: 一般化された type B

さらに証明の仕方から、図 4, 5 のような形の結び目からレンズ空間を構成することができる。ただし a は任意の整数で b は任意の有理数の場合に限る。 a も有理数なら *singular fiber* が高々 3 本の *ザイフェルト多様体* にしかならない。

表 2: $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ ($n > 1$) を生み出す simple knot による手術 ($\tilde{g}(K) \neq 0$)

	$L(p, q)$	$g'(K)$
A'_2	$L(n(5\ell + 2)^2 \pm (5\ell^2 + 5\ell + 1), (5\ell + 2)^2)$	$ (5(n-1) \pm 1)\ell + 2(n-1) $
B'	$L(n(6\ell + 1)^2 \pm (6\ell^2 + 3\ell), (6\ell + 1)^2)$	$ (6(n-1) \pm 1)\ell + (n-1) $
C'_1	$L(n(7\ell + 2)^2 \pm (7\ell^2 + 5\ell + 1), (7\ell + 2)^2)$	$ (7(n-1) \pm 1)\ell + 2(n-1) $
C'_2	$L(n(7\ell + 3)^2 \pm (7\ell^2 + 5\ell + 1), (7\ell + 3)^2)$	$ (7(n-1) \pm 1)\ell + 3(n-1) \pm 1 $
H'_1	$L(n(11\ell + 2)^2 \pm (22\ell^2 + 9\ell + 1), (11\ell + 2)^2)$	$ (11(n-1) \pm 2)\ell + 2(n-1) $
H'_1	$L(n(11\ell + 3)^2 \pm (22\ell^2 + 13\ell + 2), (11\ell + 3)^2)$	$ (11(n-1) \pm 2)\ell + 3(n-1) $
I'_1	$L(n(12\ell + 1)^2 \pm (24\ell^2 + 8\ell), (12\ell + 1)^2)$	$ (12(n-1) \pm 2)\ell + (n-1) $
I'_2	$L(n(12\ell + 2)^2 \pm (24\ell^2 + 12\ell + 1), (12\ell + 2)^2)$	$ (12(n-1) \pm 2)\ell + 2(n-1) $
I'_3	$L(n(12\ell + 5)^2 \pm (24\ell^2 + 16\ell + 3), (12\ell + 5)^2)$	$ (12(n-1) \pm 2)\ell + 5(n-1) \pm 1 $

1.2 結び目の決定について

ここで図 1,2,3 を描くための戦略を説明する。そのため以下のようなレンズ空間と連分数展開の関係について思い出しておく。連分数展開

$$\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots - \frac{1}{a_m}} =: [a_1, a_2, \dots, a_m]$$

に対してレンズ空間のトポロジーでは

$$\frac{p}{q} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \quad \bigcirc \quad \cdots \quad \bigcirc \end{array}$$

図 6: レンズ空間と連分数展開の関係

という位相同型が存在する。まず上の表 2 を見る。これは $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ を得るようなレンズ空間内の simple knot の列であり、後の章の不変量を用いて計算されている。たとえば A'_2 では

$$\frac{p}{q} = n \pm \frac{1}{[5, \ell + 1, 5, -\ell]}$$

という連分数展開を持つ。ゆえに図 6 の右辺の左端の係数 a_1 が n になる。一方 $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ は図 7 のような diagram をもつ。ここで n -framing が図式の 1 つの端に来ていることに注意する。また同じ絵の ± 1 -framing をブローダウンすれば最初の連分数展開 $[n, \pm 5, \dots]$ が作れることとなる。この後は結び目を入れてレンズ空間が作れるように操作することによって $\dots, \pm(\ell + 1), \pm 5, \mp \ell]$ の部分を作ることができる。それらは省略する。つまり結び目 K なしで作れる部分 (つまり K の Kirby move を使わずに変形できる場所) を探すことがひとつの戦略である。そのため不変量を用いて表 2 のようなものを作成することが必要になる。それは 1.5 に書かれている。

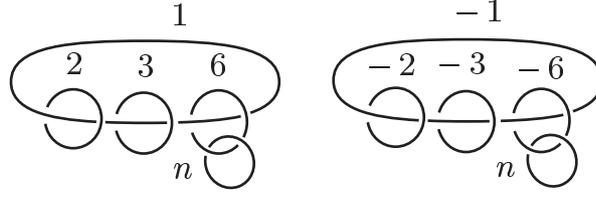


図 7: $\Sigma(2, 3, 6n - 1)$ と $\Sigma(2, 3, 6n + 1)$ の Kirby diagram.

1.3 S^3 の手術への応用

ここでホモロジー球面内の手術を考えることの利点とその期待することを述べる。表 2 にあるように $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$ の結び目の手術によってレンズ空間を得ることができたがここで $n = 0$ とすると $\Sigma(2, 3, \pm 1) \cong S^3$ であり例えば B の場合だと $L(6\ell^2 + 3\ell, (6\ell + 1)^2)$ が S^3 内の結び目の手術から得られることを意味する。実際このレンズ空間は J. Berge の分類の III の一部に対応する。また、山田氏による以前の報告集 [11] の中の Table 1 での III, $k = 3, t = 0$ の場合に対応する。 $k = 5, 7, 9, \dots$ に対してはこの報告集には書かなかったが $\Sigma(2, 5, 10n \pm 1), \Sigma(2, 7, 14n \pm 1), \Sigma(2, 9, 18n \pm 1) \dots$ の場合の $n = 0$ として得られることも計算によりわかる。またこれらのホモロジー球面への拡張は図 4 で $a = 2q + 1, b = 2(2q + 1) - \frac{1}{n}$ として得られる。 $n = 0$ として S^3 上の手術が復元できることは表 2 の他のものに対しても同じことが言える。さらに表 1 に対しても p の値の後半部分 (\pm 以降) をとれば Berge のリストに乗る。特に type H は Berge の分類の sporadic family と丁度一致している。

また、 S^3 での予想はホモロジー球面の列 (例えば $\Sigma(2, 3, 6n \pm 1)$) に対する予想と同値である。つまり以下のような予想がたつ。

予想 1.1 $\Sigma(2, 3, 6n - 1)$ のデーン手術によってレンズ空間 $L((6\ell + 1)^2 - (6\ell^2 + 3\ell), (6\ell + 1)^2)$ が得られるとき、その dual knot の homology class が $6\ell + 1$ であるような knot は図 2 のものに isotopic である。

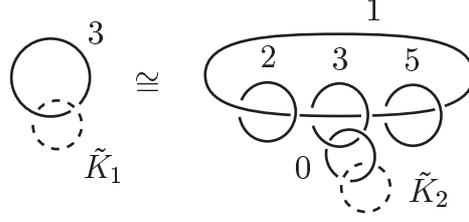
他の例に対して同じことを主張したい。これらの観察から期待されることをまとめる。

期待 1.1 S^3 上のレンズ空間手術はあるホモロジー球面内の結び目の手術の系列として拡張できる。

S^3 上の手術がどのようなホモロジー球面に拡張していくのが興味深い。なぜなら Berge のリストの結び目たちがどのような個性を持って関係しあうのか本質的に捉えることができると思えるからである。

1.4 複数のホモロジー球面から得られるレンズ空間

レンズ空間手術が起こったときに表 1 にあるように $g'(\tilde{K})$ を $g'(\tilde{K}) = 2g(K) - p - 1$ として定義する。ここで $g'(\tilde{K}) = 0$ として得られるレンズ空間手術を考える。このような条件を満たす手術は微妙なことが起こりうる。例えば [7] を参照のこと。ここで言う微妙な点とは S^3 と $\Sigma(2, 3, 5)$ から同等なレンズ空間手術が得られることである。下の図は non simple knot surgery で得られる $\Sigma(2, 3, 5)$ と simple knot surgery で得られる S^3 の例であ



る。手術が同等かどうかは Alexander polynomial が $\text{mod } t^p - 1$ で同じであることが必要十分である。いま Alexander polynomial はそれぞれ $\Delta_{\tilde{K}_1}(t) = 1 = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2 = \Delta_{\tilde{K}_2}(t) \text{ mod } t^3 - 1$ である。

1.5 不変量による制限

まず Ozsváth Szabó による Heegaard Floer homology [4], [5], [6] を使って次のような完全系列が存在することがわかる。Heegaard Floer homology は不定元 U による $\mathbb{Z}_2[U]$ 加群である。 $i \not\equiv 0 \pmod p$ であるとき

$$0 \rightarrow HF_{\text{red}}(Y) \rightarrow \bigoplus_{j \equiv i \pmod p} HF^+(Y_0(K), j) \rightarrow HF^+(Y_p(K), Q(i)) \rightarrow T_{d(Y)}^+ \rightarrow 0 \quad (1)$$

が成り立つ。 T_d^+ は $\mathbb{Z}/2$ の無限個の直和 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \dots$ に同型でその最小 degree が d であるものである。ここで Q は surgery によって得られる cobordism を通して得られる対応する spin^c -構造同士の対応とする。また適当な同一視 $\text{Spin}^c(Y_0(K)) \cong \mathbb{Z}$, $\text{Spin}^c(Y_p(K)) \cong \mathbb{Z}/p$ を用いることで $Q(i) = hi + c$ と書かれる。ここで h は上記の $x^2 = q \text{ mod } p$ の解に相当する。 $i \equiv 0 \pmod p$ の場合は次の完全系列が成り立つ。

$$0 \rightarrow HF^+(Y) \rightarrow \bigoplus_{j \equiv 0 \pmod p} HF^+(Y_0, j) \rightarrow HF^+(Y_p, Q(0)) \rightarrow 0. \quad (2)$$

この完全性と次数の変化からこのような関係が成り立つ。ここで $t_i(K)$ は $Y_0(K)$ の Turaev torsion を表す。

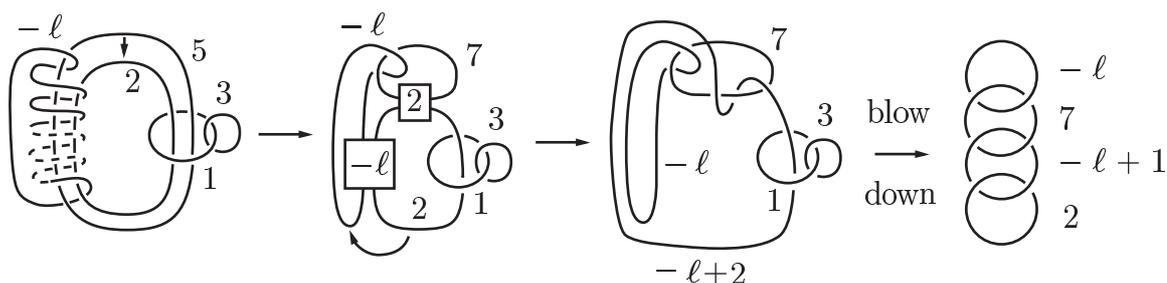
$$2 \left(\sum_{j \equiv i \pmod p} t_i(K) + \chi(HF_{\text{red}}(Y)) \right) = d(Y) - d(L(p, q), Q(i)) + d(L(p, 1), i) \quad (3)$$

ここで $t_i(K)$ の計算には [3] の公式を用いる。さらにこれらの計算だけでは必要条件だけであり、位相同型であることは基本群の計算 (simple knot の場合は [3] による) と [8] の主結果 (infinite Seifert fibre space である場合) を用いることによる。

2 主結果の証明

2.1 証明

定理 1.2, 1.3 を証明する。まず定理 1.2 の証明をする。
証明)

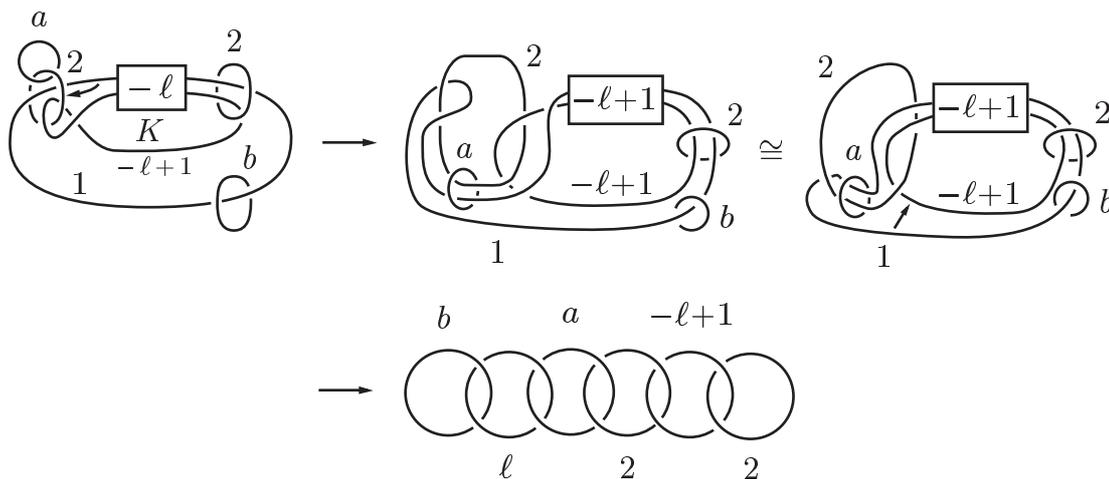


A_2 の場合は framing 5, 3 を入れ替えた形として成り立つ。 \tilde{K} が simple であることは直接 Kirby move をすることによりわかる。ここでは紙面の都合もありそれらは割愛する。

□

ここでわかることは framing 5, 3 は最終的な形の framing 7, 2 に対応し、それぞれ整数もしくは有理数であればレンズ空間が得られることである。その整数条件は直線上の diagram の途中を形作る circle であることに対応し、有理数条件は diagram の端を形作る circle に対応する。それを逆を利用してこのような変形を得たともいえる。次に定理 1.3 を一般化された形で証明する。

証明)



□

ここでも同じように framing a, b の circle が直線の途中であったり端であったりしていることに注目する。

2.2 今後の展望として

これらの証明に対する後付けとして、上に注意したことから $\Sigma(2, 3, 5)$ 上の手術の表 1 のレンズ空間手術の列 (l に関する quadratic family) をあるホモロジー球面の系列 (上記で n で表した拡張、例えば $\Sigma(2, 3, 6n-1)$ など) への拡張ができるかについて考えることはとても有意義であると思える。その拡張の仕方 (整数か有理数か) が直線の形をした Kirby diagram のどの circle に対応しているのかわかる手がかりとなるはずである。

謝辞

この研究集会で発表する機会を与えて下さった東京女子大学の大山淑之氏と研究の場を与えてくださった大阪大学大学院理学研究科数学教室には大変感謝しています。

参考文献

- [1] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.
- [2] R. Fintushel and R. Stern, *Constructing lens spaces by surgery on knots*, Math. Z. Vol. **175**, no. 1 February, (1980), 33-51
- [3] K. Ichihara, T. Saito, and M. Teragaito, *Alexander polynomials of doubly primitive knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 605-615
- [4] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261,
- [5] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1027–1158.
- [6] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications*, Ann. of Math. **159** (2004), no. 3, 1159–1245,
- [7] J. Rasmussen, *Lens space surgeries and L-space homology spheres*, arXiv:0710/2531v1
- [8] P. Scott, *There are no fake Seifert fibre spaces with infinite π_1* , Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 1, 35-70
- [9] M. Tange, *Lens spaces given from L-space homology 3-sphere*, arXiv:0709.0141
- [10] M. Tange, *On the non-existence of lens space surgery structure*, arXiv:0707.0197
- [11] 山田裕一, *Lens space surgeries and plane curve*, 結び目のトポロジー VIII 報告集