Knot homology groups from Instantons

—ゲージ理論超初心者によるゲージ理論解説—

丹下基生(Motoo Tange) (RIMS)

琉大セミナー2008年9月2日
琉球大学

§0 A short-short course of Gauge and Floer theory

$P \to X$: 主G-bundle over a 4-mfd X

$\{U, V, \cdots\}$ は X の開被覆

$f : U \cap V \to G$:変換関数

$A := \{A_U, A_V, \cdots\}$ 1-form の集まり

$(A_V)_x = f^{-1}(x)(df)_x + f^{-1}(x) \cdot (A_U)_x f(x)$

このような1-form の集まりを $\mathcal{A}$ とかく。

$\mathcal{A} = A_0 + \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ とかける。

$\mathcal{G}$ ゲージ群：自己同型束 $G_P = P \times_{Ad} G$ の切断。

作用：$g \in G_P$ に対して

$g^* A_U = g_U^{-1} dg_U + Ad(g_U^{-1})(A_u)$ $A \in \mathcal{A}$ として

$F_A := dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in \Omega^2(\mathfrak{g})$ (曲率形式)

ホッジ*作用による固有値分解

$\Lambda^2(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) \cong \Lambda^+(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) \oplus \Lambda^-(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))$

がある。

$F_A = F_A^+ \oplus F_A^-$

anti-self-dual connection（ASD-connection)

$\Leftrightarrow F_A^+ = 0$ を満たす A

$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{A} | A : \mathrm{ASD}\}/\mathcal{G}$

この $\mathcal{M}$ をASD-connectionのモジュライ空間という。

Theorem 適当な関数空間を与え、g をgenericにとれば、このモジュライ空間には可微分構造が入る。次元は

$$8c_2(P) - \dim G(1 - b_1 + b^+) \quad (G = SU(2)\mathrm{case})$$

ただしreducible connection（$\mathrm{stb}(A, \mathcal{G}) \neq \{\pm 1\}$）の近くで $\mathbb{C}P^{N-1}$ のcone

$\rightsquigarrow$ Donaldson’s Theorem A

$\rightsquigarrow$ Donaldson invariant

ASD-connectionに関するFloer theory

Chern Simons funcitonalを用いたMorse theory

M:3-mfd

α:a connection over M

$$cs(\alpha) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M tr(\alpha \wedge d\alpha + \frac{2}{3}\alpha \wedge \alpha \wedge \alpha)$$

R^*:=$\{cs$のcrit.pts$\}$= Hom$(\pi_1(M), G)$/conj $\leftrightarrow$flat connections

crit.pt.を結ぶgrad.trajectories$\leftrightarrow \mathbb{R} \times M$上のASD-connections

$\rightsquigarrow IC_*(R^*, \partial)$: chain complex

$I_*(M) := H(IC_*(R^*, \partial))$はgenericな$g$、perturbationによらない。

i.e. topological inv.

ただし全ての$\alpha \in R^*(M)$で$H^1(\pi_1(M), \mathrm{ad}(\alpha)) = 0$が必要。

・ここでは一般のGでそして曲面が埋め込まれた場合のゲージ理論を作る。(Kronheimer-Mrowkaは$G = SU(2)$の場合をapplyしてThom予想を解決)

・twisted connectionの方法

・Floer homologyはlinkのhomology inv.。

・Khovanov homologyとの関係は?

・Knot Heegaard Floer homologyとの関係は?(Alexander polynomialのカテゴリー化)

・この構成をsuperalgebra($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1|1)$)に拡張せよ。

§1 Introduction and Motivation—Khovanov theory—

モチベーション

$Kh(K,i,j)$: コバノフホモロジー

結び目のホモロジー理論の一種。

性質bigradingを持つ。

結び目のダイヤグラムから組み合わせ的に定義される。

D:diagram of a link L

$s : \{\text{cossings of } D\} \to \{0,1\}$:state

$[0,1]^n$ の各頂点に、s に対応するresolutionをおく。

$V_s := V^{\otimes |D_s|}\{|D_s|\}$, where $V := \mathbb{Z}v_+ \oplus \mathbb{Z}v_-$(graded $\mathbb{Z}$-module)

$M\{k\} = M_{j-k}$

$\bar{C}^i(D) := \oplus_{s:|s|=i} V_s$
$C(D) = \bar{C}(D)[-n_-]\{n_+ - 2n_+\}$, where $C[k]^i = C^{i-k}$

State sum difinition of Jones poly.

$\bar{V}_K(q)$ unnormalized Jones poly.

$$= \sum_i (-1)^i \sum_j q^j \dim C^i_j(D) \otimes \mathbb{Q}$$

$$= \chi(C(D))$$

Khovanovはこの複体にdifferentialを導入した。
$[0,1]^n$の辺に∂を定義する。

$$d^i x = \sum_{s'} (-1)^{\circ} f^s_{s'}(x)$$

とする。

$$f_s^{s'} : V_s \to V_{s'}$$

resolutionを変えたときにstateのcomponentの増減にしたがって次の射をテンソル。
他は恒等射

$$m : V \otimes V \to V; v_+ \otimes v_- \mapsto v_+, v_\pm \otimes v_\mp \mapsto v_-, v_- \otimes v_- \to 0$$

$$\Delta : V \to V \otimes V; v_+ \to v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, v_- \to v_- \otimes v_-$$

$$d \circ d = 0$$

$Kh(K) = H(C(D))$ はknotの不変量

当然、$\sum_i \chi(Kh(K, i, *))t^i$ はJones poly.

ところで、、

bigradingを忘れる。

このとき、

$$\mathrm{Kh(unknot)} \cong \mathbb{Z}^2$$

かつ

$$\mathrm{Kh(trefoil)} \cong \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2$$

が成り立つ。

準同型

$$\rho : \pi_1(S^3 - K, y_0) \to \mathrm{SU}(2)$$

で $\rho(m)$ が

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{1}$$

に共役であるもの全体の空間。

$$R(K) \subset \mathrm{Hom}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))$$

実は簡単な計算から $R(\mathrm{unknot}) \cong S^2$。$H_*(R(\mathrm{unknot})) \cong \mathbb{Z}^2$ がいえる。つまり

$$Kh(\mathrm{unknot}) \cong H_*(R(\mathrm{unknot}))$$

また$R(\text{trefoil knot}) = S^2 \sqcup \mathbb{R}P^3$
であるからホモロジーをとれば
$H_*(R(\text{trefoil knot})) \cong Z^4 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
がいえる。
つまり$Kh(\text{trefoil knot}) \cong H_*(R(\text{trefoil knot}))$

Observation

Let K be unknot or trefoil.

$$\mathrm{Kh}(K) \cong H_*(R(K))$$

またこの同型は勝手な$(2, p)$型トーラス結び目に拡張する。

$R(K)$によってコバノフホモロジーのようなものができた。

このobservation使ってコバノフホモロジーに付随するインスタントンフレアア理論を構築しよう。目標は一般のリー群Gを使って。そして$\mathfrak{gl}(1|1)$に向けて。

§1.1 準備

Y: closed, orientede 3-manifolds
$K \subset Y$: link in Y, $K_1, K_2, \cdots, K_r$ are the components.
$P \to Y$: $U(2)$-principal bundle
(Y, K)が非整数条件を満たすとは

$$\frac{1}{2}c_1(P) \pm \frac{1}{4}\mathrm{P.D.}(K_1) \pm \frac{1}{4}\mathrm{P.D.}(K_2) \pm \cdots \pm \frac{1}{4}\mathrm{P.D.}(K_r)$$

が全て$H_2(Y, \mathbb{Z})$の元にならない。

性質

(Y,K) が非整数条件が成り立てばフレアホモロジー $\mathbb{I}(Y,K,P)$ が作れる。
$\mathbb{I}(Y,K,P)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$grading をもち、$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$relative grading をもつ。
$K=\emptyset$ の場合は奇数のチャーン類を持つ $U(2)$ バンドルから作った通常のフレアホモロジーホモロジー理論

§1.2 フレア理論（review?）

$\mathcal{C}(Y,P)$: $ad(P)$ 上の全ての接続の空間(affine space)
$\mathcal{G}(Y,P)$: ゲージ群(det = 1)　$\mathcal{G}(Y,P) \curvearrowright C(Y,P)$
$\mathcal{B}(Y,P) := \mathcal{C}(Y,P)/\mathcal{G}(Y,P)$

チャーンサイモン汎関数

$$CS : \mathcal{C}(Y,P) \to \mathbb{R}$$

その臨界点が平坦接続全体。つまり $R(Y,P)$

$\mathcal{B}(Y,P)$ の CS での像 (少し pertabation する必要あり) は compact

$\frac{1}{2}c_1(P)$ が整数ホモロジーでなく、摂動が小さければ CS 臨界点は既約なもののみ。

<u>$\mathcal{C}(Y,K,P)$ の構成</u>

$\mathcal{C}(Y,K,P)$:$K \subset Y$ で特異点を持つような Y 上の接続全体

$\mathcal{B}(Y,K,P) = \mathcal{C}(Y,K,P)/\mathcal{G}(Y,K,P)$:ゲージ群 ($\det = 1$) で割った空間

$\mathfrak{C}(Y,K,P) \subset \mathcal{B}(Y,K,P)$: 平坦接続全体

$= R(Y,K)/SU(2)$

$= \mathrm{Hom}(\pi(Y-K,y_0),SU(2))$ の中で (1) を満たすものの共役類

非整数条件のためclassical knot（$K \subset S^3$）に応用するためには工夫が必要。
$K \subset Y$ そのような結び目

$$FI_*(Y,K) = \mathbb{I}_*(Y\#T^3, K, P_0\#Q)$$

(T^3, Q) はチャーン類のP.D.が $S^1 \times \{\text{point}\}$ となる $U(2)$-bundle

実は (T^3, Q) の既約な平坦接続のゲージ商 $(\det = 1)$ は2成分であることと連結和は

$$R(Y_0\#Y_1)/SU(2) = R(Y_0) \times_{SU(2)} R(Y_1)$$

が成り立つことを使って

$$\mathfrak{C}(Y\#T^3, K, P_0\#Q) = R(Y,K) \sqcup R(Y,K)$$

がいえる。右辺は $SU(2)$ で割っていないことに注意。
このことに $R(Y,K)$ は一点 y_0 でのファイバーの同型類も固定したものという解釈を与える。→*framed instanton homology*という。

ゆえに、CS が臨界点の周りで Morse-Bott の意味で非退化であれば臨界点のホモロジーを出発とするスペクトル系列によって FI_* が計算できることになる。

Question　全ての交代結び目に対して

$$FI_*(K) \cong \mathsf{Kh}(K) \oplus \mathsf{Kh}(K)$$

が成り立つか？

$(2, p)$ 型のトーラス結び目には成り立つ。
$(3, 4), (3, 5)$ 型のトーラス結び目 (非交代的) にも成り立つ。
$(4, 5)$ 型トーラス結び目に対してこの同型は成り立たない。ホモロジーのランクは落ちる。

§2 Seidel-Smith's work

Khのsymplectic geometry description

Kleinian singularity(まずはお話)

よく知られている知識として

$\tilde{\Gamma} \subset SL(2,\mathbb{C})$:有限部分群（実は$C_n, \tilde{D}_{2n}, \tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{I}$に分類されている）

$\mathbb{C}^2/\tilde{\Gamma}$: 商空間

$= \{x \in \mathbb{C}^3 | f(x,y,z) = 0\}$となる多項式$f(x,y,z)$が存在する。

Kl.sing.$\to^{\exists}$Kl.sing.の特異点解消（ブローアップ）

Kl.sig.の特異点解消=Milnor fiber$\to^{\exists}$ディンキン図形

ディンキン図形$\to^{\exists}$リー環

リー環$\to$$^\exists$Kl.sing.　……

最後のステップ

べき零行列$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$とあるslice $\mathcal{S}$との交点にKlein特異点が現れる。

(詳しくは「特異点とルート系（松澤淳一著）」「松」)

例：$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) | \det(A) = 0\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} | \det(A) = -x^2 - yz = 0 \right\}$

$\mathcal{O}_{reg} \cup \mathcal{O}_{sreg}$ (2の分割数に応じた分解) $= A_1$型Kl.sing.

$(\mathcal{S} = \mathfrak{sl})$

$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W \cong \mathbb{C}^l$(Steinberg map)

lは$\mathfrak{g}$の階数(Cartan subalgの次元)

$0 \neq x \in \mathcal{O}_{sreg} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g})$,
$\mathfrak{g} \supset \langle x, h, y \rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$(共役を除いて一意) (an $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-triple)
$\mathcal{S} = x + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y) \subset \mathfrak{g}$ (yの中心化環)

半普遍変形

あるslice $\mathcal{S}$をとれば

$$\chi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathfrak{h}/W$$

はKl.sing.$= \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{S}$の半普遍変形を与える。

そこで、Seidel-Smithは、、、

K を m 本の braid の closing として表す。(実は任意の結び目は braid の closing で得られる)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2m, \mathbb{C})$

$t = (\mu_1, \cdots, \mu_{2m}) \in \mathrm{Conf}^0_{2m}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{h}/W$

(pairwise different configuration space with zero center of mass)

$x \in \mathfrak{g}$(nilpotent ellement with two Jordan brock of size m)

$\mathfrak{g} \supset \langle n^+ = x, n^-, h\rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (JM-triple)

$\mathcal{S}_m = n^+ + \ker(z \mapsto zn^-)$

$\mathcal{C}_{m,t} := \chi^{-1}(t) \cap \mathcal{S}_m$

$\mathcal{C}_m \to \mathfrak{h}^{mult.reg}/W^{mult}$ (fiber bundle)

$\mathcal{Y}_{m,t} := (\chi|_{\mathcal{S}_m})^{-1}(t)$

$\mathcal{Y}_{m,t} \supset L \cong (S^2)^m$: lagrangian submfd

β : braid $\in B_{2m}$
$\rightsquigarrow h_\beta^{\text{resc}}$: symplectic auto.

$$Kh^\star_{\text{symp}}(K) := HF^{\star+m+w}(L_\wp, h_\beta^{resc}(L_\wp))$$

Conjecture

$$Kh^k_{symp}(K) \cong \oplus_{i-j=k} Kh^{i,j}(K)$$

§3 Notation and root system

G: compact, connected, simple, simply connected Lie group
T: the maximal torus
$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$: the Lie algebras
integer lattice $\subset \mathfrak{t}$: exp($2ix$)が単位行列。
$R \subset \mathfrak{t}^*$: the set of roots
R^+: the positive roots, s.t. $R = R^+ \cup R^-$
$\Delta^+ \subset R^+$: the simple roots

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta \quad \text{(Weyl vector)}$$

θ: the highest root (rootの中での中で)
$\langle a, b \rangle = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(a)\mathrm{ad}(b))$ (Killing form)

$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^* \quad \alpha \mapsto \alpha^\dagger$ Killing formから来る同型
$\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \quad \psi \mapsto \psi_\dagger$ その逆写像
αをrootとする。$\alpha^\vee := \frac{2\alpha^\dagger}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ (coroot)
the simple coroots $\alpha^\vee$はinteger latticeの基底になる。
w_α : fundamental weight ($\alpha^\vee$のdual basis)
The fundamental Weyl chamber: $w_\alpha^\dagger \in \mathfrak{t}$によって張られるpositiveコーン

$$\theta = \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha \alpha$$

$$\theta^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha^\vee \alpha^\vee$$

Coxeter number and dual Coxeter number

$$h = 1 + \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha$$

$$h^\vee = 1 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha^\vee$$

$\langle\theta,\theta\rangle = 1/h^\vee$ が成り立ち、
$\rho = \sum_{\alpha\in\Delta^+} w_\alpha$ が成り立つ。ゆえに $\langle\rho,\theta\rangle = 1 - 1/h^\vee$
勝手な root$\alpha \in R$ に対して次のような準同型

$$j_\alpha : SU(2) \to G$$

が存在して

$$dj_\alpha : \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \mapsto \alpha^\vee$$

を満たすようなもの存在する。

$P \to X$ 主 G-bundle

$$k = -\frac{1}{4h^\vee} p_1(\mathfrak{g})[X]$$

$\Phi \in \mathfrak{t}$を基本Weyl chamberのある元（ここでWeyl chamberはclosed）。
θをhighest rootとし、

$$\theta(\Phi) < 1 \tag{2}$$

を仮定する。
$\mathfrak{g}_\Phi = \{U \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}_{\exp(2\pi\Phi)}(U) = U\} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\Phi)$
$G_\Phi \subset G$: その部分リー群

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_\Phi \oplus \mathfrak{o}$$

ここで$\mathfrak{o}$はG-inv. 部分空間。
i.e.adjoint orbitのtangent sp.

$\alpha(\Phi)$の符号にしたがって分解をする。

$$R = R^{+}(\Phi) \cup R^{0}(\Phi) \cup R^{-}(\Phi)$$

simple rootの集合も分解

$$\Delta^{+} = \Delta^{+}(\Phi) \cup \Delta^{0}(\Phi)$$

ここで複素化の分解

$$\mathfrak{o} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{o}^{+} \oplus \mathfrak{o}^{-}$$

where
$R^{+}(\Phi)$（もしくは$R^{-}(\Phi)$）のweight spaceの和として分解。

φをΣの近傍νでのG_P/G_Φ-bundle($O_P \subset \mathfrak{g}_P$)のsectionを与えること
$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}_P|_\nu$ の reduction $\mathfrak{g}_\varphi$を与えること。

$$\mathfrak{g}_P|_\nu \cong \mathfrak{g}_\varphi \oplus \mathfrak{o}_\varphi$$

が見つかる今、$P|_\Sigma$の構造群のΣへの簡約をchoice
それを近傍νに拡張する。

$$A^\varphi = A^0 + \beta(r)\varphi \otimes \eta$$

と定義するとこれは$P|_{X-\Sigma}$上のconn.。

ただしβはνの近傍のcut-off fct.
A^φのΣのmeridianの回りでのholonomyは

$$\exp(-2\pi\varphi)$$

に漸近的に等しくなる。

今、$P|_{X-\Sigma}$上のconnectionの空間を定義する。

$$\mathcal{C}^p(X,\Sigma,P,\varphi) := \{A^\varphi + a | a, \nabla_{A^\varphi} a \in L^p(X-\Sigma)\}$$

このとき、$\mathfrak{o}_\varphi$によるbundle autoの固有値は全て1とは違う。これは条件(2)によるもの。

本当はΣの近くでWeighted Sobolev spaceを用いる。
(cylindrical endをもつ多様体にFredholm性を保つ。
multi.theorem $W_2^p \times W_1^p \to W_1^p$)

$$\mathcal{G}^p(X,\Sigma,P,\phi) := \{g \in \mathrm{Aut}(P|_{X-\Sigma}) | \nabla_{A^\varphi} g, \nabla^2_{A^\varphi} g \in L^p(X-\Sigma)\}$$

Definition connection Aに対してそのstabilizerが有限群の時ゲージ群は既約という。

$\mathcal{G}^p(X,\Sigma,P,\phi)$のhomotopy groupは$\Sigma$に沿った構造群のreductionに関する$P$のautoの群のhomotopy type。

PはΣ上自明でそのtrivializationもunique
簡約の仕方は$\pi_1(G_\Phi)$によって分類される。

埋め込み$T \hookrightarrow G_\Phi$はπ_1上に全射を誘導する。
redctionはそのlift $\xi \in \{\mathfrak{t}$のinteger lattice$\}$

$Z(G_\Phi) \subset T$:G_Φの中心。
$\mathfrak{z}(G_\Phi)$をそのリー代数。

$$\prod : \mathfrak{t} \to \mathfrak{z}(G_\Phi)$$

を直交射影とする。$\prod(\xi) \in \mathfrak{z}(G_\Phi)$
Definition[Monopole charge]
$L(G_\Phi) \subset \mathfrak{z}(G_\Phi)$: $\mathfrak{t}$のinteger latticeの$\prod$での像
$L(G_\Phi)$は$P \to \Sigma$のG_Φへのreductionの分類と一致。(ただしΣは連結)

φによって決定された構造群のreductionは$l \in L(G_\Phi)$によって分類されるとき$L(G_\Phi)$をmonopole chargeという。

Oには実は複素構造が入る。$\mathfrak{o}_{\phi}^{-}$上の複素構造は積分可能。
$c_1(\mathfrak{o}_{\varphi}^{-}) = \varphi^*(c_1(O_P/X))$とかける。
$\varphi : H^2(O_P) \to H^2(\Sigma)$
ここでO_p/XはO_P上のvertical tangent space。

$$M(X, \Sigma, P, \phi) := \{A \in \mathcal{C}^p | F_A^+ = 0\}/\mathcal{G}^p$$

としてASD conn.の空間を定義する。
実は、このとき$[A]$の近傍で倉西構造が入る。(ただしpは十分2に近いとする)

次のellipitic complexがモジュライ空間を記述する。

$$L^p_{2,A}(X-\Sigma;\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^0)\stackrel{d_A}{\to}L^p_{1,A}(X-\Sigma;\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^1)\stackrel{d_A^+}{\to}L^p(X-\Sigma;\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^+)$$

指数定理からこのモジュライ空間の次元は

$$(4h^\vee)k+2\langle c_1(\mathfrak{o}_\varphi^-),[\Sigma]\rangle+\frac{(\dim_{\mathbb{R}}O)}{2}\chi(\Sigma)-(\dim G)(b^+-b^1+1)$$

となる。これは

$$=4h^\vee k+4\rho(l)+\frac{(\dim O)}{2}\chi(\Sigma)-(\dim G)(b^+-b^1+1)$$

とかける。ρはWeyl vector。

実はFloer homologyを定義するために必要な条件がある。
Monotonicity condition
Avoding reducible connection

§2.3 Monotonicity

Monotonicity conditionとはtrajectry(Floer homologyの境界写像)の空間の有限性を保証する。

Energy
$\mathcal{E} = \int_{X-\Sigma} |F_A|^2 dvol$

Kronheimer-Mrowkaの仕事により。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X,\Sigma,P,\varphi) &= 32\pi^2\left(h^{\vee}k + \sum_{\beta\in R^+}\beta(\Phi)c_1(\mathfrak{o}_{\beta}^{-})[\Sigma] - \frac{1}{2}\sum_{\beta\in R^+}(\Sigma\cdot\Sigma)\right)\\ &= 8\pi^2(4h^{\vee}k + 2\langle\Phi,\xi\rangle - \langle\Phi,\Phi\rangle(\Sigma\cdot\Sigma))\\ &= 8\pi^2(4h^{\vee}k + 2\langle\Phi,l\rangle - \langle\Phi,\Phi\rangle(\Sigma\cdot\Sigma))\end{aligned}$$

Definition

Φがmonotoneである。

$4h^{\vee}k + 2\langle\Phi,l\rangle$と$8\pi^2(4h^{\vee}k + 2\langle\Phi,l\rangle)$が$k$と$l$に関して比例する。

この場合、monotonicityとは$\langle \Phi, l\rangle = \rho(l)$（for any $l \in L(\Phi)$）が成り立つことである。

任意の($\Phi_0 \in$)Weyl chamberの中にはmonotone conditionを満たす元が唯一存在する。

$$\Phi = 2\prod(\rho^\dagger) = \sum_{\alpha \in R^+(\Phi_0)} \alpha^\dagger$$

とすればよい。このとき

$$\theta(\Phi) < \sum_{\alpha \in R^+} \theta(\alpha^\dagger) = 2\langle \theta, \rho\rangle = 1 - \frac{1}{h^\vee} < 1$$

をみたす。

monotonicityの幾何的な解釈

monotone symplectic mfd

monotone condition を満たす $\Phi \in \mathfrak{g}$ は、(O, ω_Φ) が monotone symplectic mfd であることと同値。

ゆえに

KE-mfd

monotone condition を満たす $\Phi \in \mathfrak{g}$ は、$\Phi \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$(orbit) に Einstein constant$= 1$ の Kähler Einstein metric が入ることと同値。

$E^+ \subset \mathfrak{z}(G_\Phi)^* : \beta \in R^+$ を $\beta|_{\mathfrak{z}(G_\Phi)}$ として考えたもの
この E^+ を用いて簡約

$$\mathfrak{o}_\varphi^- = \oplus_{\gamma \in E^+} \mathfrak{o}_\varphi^-(\gamma)$$

を $TO(\gamma) : O$ の tangent sp. の E^+ に沿った簡約。

$$\Omega_\Phi = \sum_{\gamma \in E^+} \gamma(\Phi) c_1(TO(\gamma)) \in H^2(O; \mathbb{R})$$

$c_1(\mathfrak{o}_\beta^-) = \varphi^* c_1(TO(\gamma)) = \varphi^* c_1(O)$
$c_1(\mathfrak{o}_\varphi^-)[\Sigma] = \rho(l)$
だったから

Energyのk,lに線形な部分は

$$32\varphi^2(h^\vee k + \langle \varphi^*\Omega_\Phi, [\Sigma]\rangle)$$

formal dimのk,lに線形な部分は

$$4h^\vee k + 2\langle c_1(\mathfrak{o}^-_\varphi), [\Sigma]\rangle$$

となる。
ゆえにmonotone conditionは$c_1(\mathfrak{o}^-) = 2\Omega_\Phi$と同値。
2-formΦに対して

$$\omega_\Phi([U,\Phi],[V,\Phi]) = \langle \Phi, [U,V]\rangle$$

orbitにはAd-actionによりcanonicalなKähler.
KKS(Kirillov-Kostant-Souriau) 2-form.

実は　　　$[\omega_\Phi] = 4\pi\Omega_\Phi$. $\therefore \Omega_\varphi = 2\phi c_1(\mathfrak{o}^-)$
$\Leftrightarrow (O,\omega_\Phi)$がmonotone

例

$G = SU(N)$,$P \to X$ principal-G-bdl

$$\Phi = i\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$$

$$N_1, \cdots, N_m$$

$N = \sum N_s$, $\sum N_s \lambda_s = 0$

$\lambda_1 - \lambda_s < 1$

$$G_\Phi = S(U(N_1) \times \cdots \times U(N_m))$$

$P_s \to \Sigma$, $U(N_s)$-bdl, $\quad l_s = -c_1(P_s)[\Sigma]$

$\sum l_s = 0$ $l = i\mathrm{diag}(l_1/N_1, l_2/N_2, \cdots, l_n/N_s)$

$\langle \Phi, l \rangle = 2N \sum_{s=1}^{N} \lambda_s l_s$

$\mathcal{E}(X, \Sigma, P, \phi) =$
$32\pi^2 N(k + \sum_{s=1}^m \lambda_s l_s - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^m \lambda_s^2 N_s)\Sigma \cdot \Sigma)$
$\dim M =$
$$4Nk + 2\sum_{s,t} \mathrm{sign}(t-s) N_t l_s + \sum_{s<t} N_s N_t \chi(\Sigma) - (N^2-1)(b^+ - b_1 + 1)$$

$N_1, N_2 = N-1$
$O = \mathbb{C}P^{N-1}$
$(l_1, l_2) = (l, -l)$ $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\frac{\lambda}{N-1}$ ゆえにA^φのholonomyは
$\zeta \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$
$\zeta = e^{\pi i/N}$

avoiding reducible connection

モジュライ空間のコンパクト化の時に問題になる。

可約接続の取り扱いは少し面倒。

解決策

ある反整数条件があればよい。

bubbling(Compactness Theorem)

$[A_n] \in \mathcal{M}(X, \Sigma, P, \varphi)$

部分列をとれば以下が成り立つ

${}^\exists P' \to X$

${}^\exists \varphi' : O_{P'} \to \Sigma$ のsection$\rightsquigarrow$ a reduction to $G_\Phi \subset G$ along Σ

${}^\exists \mathbf{x} \subset X$: finite set

$g_n : P'_{X-\mathbf{x}} \to P, g_n^*(\varphi) = \varphi'|_{\Sigma-\mathbf{x}}$

s.t.$g_n^*(A_n) \to A|_{X-\mathbf{x}}$(一様収束)

$$2|F_{A_n}|^2 \to 2|F_A|^2 + \sum_{x \in \mathbf{x}} \mu_x \delta_x$$

$\mu_x = 8\pi^2(4h^\vee k_x + 2\langle \Phi, l_x \rangle)$ ((S^4, S^2)の場合のEnergy formula)

$k = k' + \sum_{x \in \mathbf{x}} k_x$

$l = l' + \sum_{x \in \mathbf{x}} l_x$

さらに(k_x, l_x)に対して分割

$k_x = k_{x,1} + \cdots + k_{x,m}$

$l_x = l_{x,1} + \cdots + l_{x,m}$

とsolution

$[A_{x,i}] \in M(S^4, S^2, P_{x,i}, \varphi_{x,i})$ が存在する。

where

$k(P_{x,i}) = k_{x,i}$,

$l_{x,i}$: S^2に沿ったstructure groupのreductionのmonopole charge

(S^4, S^2)上のinstantonのanalysis

Example

$G = SU(N)$,

Φ:固有値$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$,$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$

$\lambda_1 - \lambda_m < 1$,$N_s$:mult.of λ_s

$G_\Phi = S(U(N_1) \times U(N_2) \times \cdots \times U(N_m))$

$l_s = -c_1(E_s)[S^4]$ $\quad E_s$:associated $U(N_s)$-bundle

$K_0 := k \geq 0$

$K_1 := k + l_1 \geq 0$

$K_2 := k + l_1 + \cdots + l_{m-1} \geq 0$

formal dim $= 2(N_m+N_1)K_1+(N_1+N_2)K_2+\cdots 2(N_{m-1}+N_m)K_m$

non-empty moduli space of positive formal dim

$= \min\{2(N_{s-1} + N_s) | s = 1, 2, \cdots, m\}$

Orbifold connection

Fredholm性を保証する。

Riemann mfd $(U-\Sigma, g^{\nu})$をΣの近くで

$$du^2+dv^2+dr^2+(\frac{1}{\nu})^2r^2d\theta^2$$

の形とする。このmetricを用いて

$$\mathcal{D}_{\varphi}=-d^*_{A^{\varphi}}\oplus d^+_{A^{\varphi}}:\check{L}^p_{k,A^{\varphi}}(X-\Sigma,\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^1)\to\check{L}^p_{k,A^{\varphi}}(X-\Sigma,\mathfrak{g}_P\otimes(\Lambda^0\oplus\Lambda^+))$$

Proposition[KM] 次を満たす$I\subset(0,1)$,実数p,整数mをとる：

$^{\forall}\nu\geq\nu_0, {}^{\forall}k\leq m$,

$^{\forall}\Phi\in${fd'l Weyl chamb.}s.t.$\alpha(\Phi)\in I$,$^{\forall}\alpha\in R^+(\Phi)$

$\mathcal{D}_{\varphi}$,adj($\mathcal{D}_{\varphi}$)は両方Fredholmであり

Fredholm Alternativeが成り立つ。

G : semi-simple case

reduced bundle

$$\mathfrak{d}(P) \to X$$

を考えよ。$\mathfrak{d} : G \to \bar{Z}(G) := G/[G,G]$

$\Theta : \mathfrak{d}(P)$ の中のある connection

(本当は hol.pert. によって決められるが、ここでは省略)

$\mathcal{C}(X,P) := \{A | \mathfrak{d}(A) = \Theta\}$

$M(X,P) := \{A \in \mathcal{C}(X,P) | F_{\bar{A}}^{+} = 0\}$

Note:P 上の曲率でなく $\mathfrak{d}(P)$ 上の曲率

twisted connection を用いて (X, Σ) の理論を構成。

$c(P) \in H^2(X; L(G_\Phi))$

$\bar{P}$-bundle を P-bundle に lift するための障害。

§3 Floer homologyの構成

G:simple,non-simply connected

$K \subset Y$ knot or link

$P \to Y$ principal G-bundle

maximal torus, positive roots:fixed

$\Phi \in \{$fundamental Weyl chamber$\}$

$O \subset \mathfrak{g}$: adjoint orbit

φ : O_P 上のある K に沿ったsection$\rightarrow$ $P|_K$ の G_Φ へのreductionを決める。

g^ν:K に沿ったsing. metric

$C(Y,K,\Phi)=\{B|B-B^{\varphi}\in \check{L}^2_{m,B^{\varphi}}\}$
$\mathcal{B}^{\varphi}$: K の近くで Φ を使ってねじったmodel connection
$B(Y,K,\Phi)=C(Y,K,\Phi)/\mathcal{G}(Y,K,\Phi)$
CS-functoinal $\cdots$ flat connection ($F_B=0$) をcritical pointにもつ
$\mathcal{C}(Y,K,\Phi)$ 上のある汎関数（詳しい定義はここではしない）
ここでは K のmeridianでの像がexp($-2\pi\Phi$) にconjugateであるもの。

$\pi_0(\mathcal{G}(Y,K,\Phi))\cong\mathbb{Z}\times[K,G_\Phi]\cong\mathbb{Z}\oplus L(G_\Phi)^r$
$d:\mathcal{G}(Y,K,\Phi)\to\mathbb{Z}\oplus L(G_\Phi)$
$d(g)=(k,l)$
$CS(B)-CS(g^*(B))=4\pi^2(4h^{\vee}k+2\langle\Phi,l\rangle)$

holonomy perturbation $\mathcal{P}$:あるperturbationの空間

$\pi \in \mathcal{P}$: residual subset の元

$$CS + f_\pi : \mathcal{B}(Y, K, \Phi) \to \mathbb{R}$$

このとき$CS + f_\pi$の臨界点はnon-degenerateになる。

residual(nowhere dense subsetの可算共通部分の補集合)

反整数条件

$K = K_1, \cdots K_r$ が K の成分とする。G をnon-sinple groupとする P を (Y, K, Φ) の主 G バンドル任意のfundamental weightw_α とワイル群の元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ に対して

$$w_\alpha(c(P)) - \sum_{j=1}^{r} (\overline{w}_\alpha \circ \sigma_j)(\overline{\Phi})\mathrm{P.D.}[\Sigma]$$

が整数係数コホモロジークラスにならない。

この条件があるとreducibleな解を避けることができる。

Remark

reducibleな解 ⋯ ある接続上に作用するゲージ群の作用のstabilizerが有限次元のもの

この条件は$G = U(N)$でKが全てnull homologousでは$c_1(P)$のYの整数ホモロジークラスを持つ$c_1(P)$とのpairingがNと互いに素ということに同値である。さらにΦのmonotone conditionが成り立つとCSの勝手な臨界点の$\mathcal{G}(Y, K, \Phi)_\delta$の作用が$Z(G) \cap [G, G]$となる。

$$\rightsquigarrow \mathbb{I}_*(Y, K, \Phi)_\delta$$

for $\pi \in \mathcal{P}$ に対して

$\mathrm{CS} + f_\pi : C(Y, K, \Phi) \to \mathbb{R}$ perturbed CS-funtional

$\mathfrak{C}_\pi \subset \mathcal{B}(Y, K, \Phi)$ (critical points)

$Z := \mathbb{R} \times Y$

$L := \mathbb{R} \times K$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{C}_\pi$

$B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}(Y, K, \Phi)$

$z : \alpha, \beta$ をつなぐ path

$A_0 : \pi_2^* P$ 上の conn. で end の両側で B_α, B_β に一致するもの。

$\mathcal{C}_z(\alpha, \beta) = \{A | A - A_0 \in \check{L}^2_{m,A_0}(Z; \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^1(Z)\}$

$\mathcal{B}_z(\alpha, \beta) = \mathcal{C}_z(\alpha, \beta)/\mathcal{G}(Z)$

$M_z(\alpha,\beta) \subset \mathcal{B}_z(\alpha,\beta)$
$F_A^+ + \widehat{V}(A) = 0$ (perturbed equation)
の解のゲージ同値類

$Q_A := -d_A^* \oplus (d_A^+ + D\widehat{V}|_A)$ (線形作用素)
index$(Q_A) =:$ gr$_z(\alpha,\beta)$

non-integral condition

π:small perturbation

これらを満たせば $M_z(\alpha,\beta)$ は全てよい多様体(smooth)になる。

しかし gr(α,β) が有限のとき $M_z(\alpha,\beta)$ が有限とは限らない。

Energy と dim の関係が monotonicity であれば十分。

$\underline{\mathrm{gr}_z(\alpha,\beta)\text{ と }\mathcal{E}_z(\alpha,\beta)\text{ の関係}}$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{C}_\pi$

一般に α と β の間の Energy(topological energy) は $[\alpha], [\beta]$ だけでは決まらない。

その間の path が必要。

$\alpha = \beta$ のとき (for simplicity)

$B, B' \in \mathcal{C}(Y, K, \Phi)$: 対応する conn.

${}^\exists g$ s.t. $B' = g^* B$

$d(g) = (k, l) \in \mathbb{Z} \times L(G_\Phi)$

$\mathrm{gr}_z(\beta, \beta) = 4h^\vee k + 4\rho(l)$

$\mathcal{E}_z(\beta, \beta) = 8\pi^2(4h^\vee k + 2\langle \Phi, l \rangle)$

Φ が monotone$\Leftrightarrow \langle \Phi, l \rangle = 2\rho(l)$

Proposition Φ が monotone なら、任意の $D > 0$ に対して、moduli space$M_z(\alpha, \beta)$ が non-empty で formal dim が D 以下である α, β, z が有限個になる。

$$C_*(Y, K, \Phi) = \oplus_{\beta \in \mathfrak{C}_\pi} \mathbb{Z}\Lambda(\beta)$$

$$\partial : C_*(Y, K, \Phi) \to C_*(Y, K, \Phi)$$

$$\partial = \sum_{(\alpha,\beta,z):\mathrm{gr}_z(\alpha,\beta)=1} \sum_{[A]\in M_z(\alpha,\beta)} \epsilon[\breve{A}]$$

where
$\breve{A}$ は A の $\mathbb{R}$-orbit

Lemma $\partial \circ \partial = 0$
$\mathrm{gr}_z(\alpha, \beta) = 2$となるtrajectryの境界は本質的にbroken trajectry

$$I_*(Y, K, \Phi) = H(C_*(Y, K, \Phi))$$

gradingをmodulo 2をすればpath zのとり方によらない。
実際$G = SU(N)$でΦを固有値が2つの場合は$\mathbb{Z}/2N$-gradingをもつ
cobordism invarianceを満たす。
局所系係数にできる。
non-simpleに一般化できる。
(特性類$c(P) \in H^2(Y; L(G))$と$\bar{Z}G$)-bundleで考えよ)

§4 Knot homology groupの構成

$G := U(N)$
Y:3-manifold
$K \subset Y$: knot or link
$y_0 \in Y - K$:base point
$T_{y_0}Y$ の向きのついたframeを選ぶ。
$(Y \# T^3, K)$:連結和の中の結び目。
$\delta_1 \to T^3$:$U(1)$-bundleで$PDc_1(\delta_1) = S^1 \times \mathrm{pt}$を満たす。
$\Phi = \mathrm{diag}(i/2, 0, \cdots, 0)$: positive Weyl chamberの元とする

Definition

$\bar{C}_*(Y\#T^3;K,\Phi)_\delta := C_*(Y\#T^3;K,\Phi)_\delta \Big/ \mathbb{Z}/N$

$\bar{FI}^N_*(Y,K) := H(\bar{C}_*(Y\#T^3;K,\Phi)_\delta)$

Prop.

$\bar{FI}^N_*(\text{unknot}) \cong H_*(\mathbb{C}P^{N-1},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^N$

$FI^N_*(\text{unknot}) \cong H_*(\mathbb{C}P^{N-1} \amalg \mathbb{C}P^{N-1} \amalg \cdots \amalg \mathbb{C}P^{N-1},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{N^2}$

問題

・Atiyah-Floer conjectureは？(この方向性で頑張っている人はいる？)

・$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$に含まれる特異点はまだよく分かっていない。

・面白い特異点から何かknotの不変量はできないか？

「松」によると$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$の特異点解消の理論もあるらしい。

・knot Heegaard Floerをsuperalgebra $\mathfrak{g}(1|1)$を使ってホモロジーを作れるか？

Thank you for your attention!!