Daemi-Scaduto's papers

丹下基生：筑波大学

2021/3/31

目次

1. Equivariant aspects of singular instanton Floer homology
2. Chern-Simons functional, singular instantons, and the four-dimensional clasp number

の内容説明。

§1 導入

動機

$K \subset Y$：ホモロジー球面内の結び目
(Y, K) 上の特異接続全体の空間のホモロジーを考える。

$$\rightsquigarrow (Y, K) \text{ の情報が出てくる}$$

S^1 作用をもつ特異接続のモジュライ空間を考えること。

$K \subset Y$：**ホモロジー球面内の結び目**
$E \to Y$：trivial $SU(2)$ **接続** K **で** singular
$p \in K$：base point
K **の** meridian γ **に沿ったホロノミー** $Hol_\gamma(A)$ **が**

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \in U(1) \subset SU(2)$$

の共役に漸近するもの as $\epsilon = \mathrm{diam}(\gamma) \to 0$。

Daemi-Scaduto's papers

framed singular connection

framed singular connection

$\widetilde{\mathscr{C}}(Y,K)$：framed singular connection は以下。
$p \in K$ において E の自明化をもち、
K の p でのホロノミーが、

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

に漸近するもの。
$\tilde{\mathscr{G}}(Y,K)$：framed singular connection の Aut
$\widetilde{\mathscr{B}}(Y,K) = \tilde{\mathscr{C}}(Y,K)/\tilde{\mathscr{G}}(Y,K)$ （自由作用）
framed singular connection のゲージ同値類。

$\widetilde{\mathscr{B}}(Y,K)$ は起点 $p \in K$ で framing を変える S^1 作用をもつ．stabilizer が存在する

$$\begin{cases} \text{自由} & \textit{irreducible} \\ \text{stabilizer をもつ} & S^1\text{-reducible} \end{cases}$$

S^1-reducible：E が 2 つの直線束の直和に分解する)
これ以降 $\widetilde{\mathscr{B}}(Y,K)$ は登場しない。

$\mathcal{S}$-複体

$(\widetilde{C}(Y,K),\widetilde{d})$
$\mathbb{Z}[\chi]/(\chi^2)$ **上の加群** $(H^*(S^1)$ **のコホモロジー環**)

$$(\widetilde{C}(Y,K),\widetilde{d}) = C(Y,K) \oplus C(Y,K)[1] \oplus \mathbb{Z}$$

$\chi(a,b,c) = (0,a,0)$
$\widetilde{C}(Y,K)$ **は** R-**計量などに依るが、**$\mathcal{S}$-**複体のチェインホモトピー同値類は** (Y,K) **の不変量**

$$\widetilde{I}_*(Y,K) = H_*(\widetilde{C}(Y,K))$$

$$\widetilde{I}_*(Y,K) \cong I^\natural_*(Y,K) \quad (\text{KM's } I^\natural)$$

Daemi-Scaduto's papers

§1 導入
§2 特異 $SU(2)$ ゲージ理論の復習
§3 フレアホモロジー
§4 特異インスタントン同変不変量
§5 同変不変量
§7 局所系係数・フィルトレーション
§8 KM のホモロジーとの関係
§9 計算例
Daemi Scaduto

定理

$K \subset Y$：結び目

$$\chi(I_*(Y,K)) = 4\lambda(Y) + \frac{1}{2}\sigma(K)$$

$\hat{C}_*(Y,K) = \tilde{C}(Y,IK) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x], \quad \hat{d} = -\tilde{d} + x - \cdot\chi$
とする。
$\widetilde{\mathscr{B}}(Y,K)$ の S^1-同変ホモロジー
($\mathbb{Z}/4$-grading をもつ)
$\check{I}_*(Y,K), \quad \bar{I}_*(Y,K), \quad \tilde{I}_*(Y,K)$ などの変種があり、これらの間に exact triangle がある。
これらは Heegaard Floer homology の
$HFK^+(Y,K), HFK^\infty(Y,K), \widehat{HFK}(Y,K)$ のアナロジー

係数拡大

$$\mathscr{R} = \mathbb{Z}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}]$$

上で定義される局所系 Δ を考えることができる。
ここで、

- T ••• knot 周りの flat connection の holonomy(instanton の monopole charge)
- U ••• flat connection の CS-func(topological charge)

を表す。

係数の変更

$\mathscr{S}$：$\mathscr{R}$-代数とする
$\tilde{C}(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}})$ は、$\mathscr{S}$ 上の $\mathcal{S}$-複体
$\rightsquigarrow I_*(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}})$ は $\mathscr{S}$-module
$\rightsquigarrow \hat{I}_*(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}})$ は $\mathscr{S}[x]$-module
example
$\mathscr{T} = \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$：$\mathscr{R}$-代数をとれば、$U = 1$ として得られる $\mathcal{S}$-複体 $\tilde{C}(Y, K, \Delta_{\mathscr{T}}, \tilde{d})$ が得られる。

Kronheimer-Mrowka の不変量

Kronheimer-Mrowka: Instantons and Bar-Natan homology,
KM:Khovanov homology is an unknot-detector
KM: Gauge theory and Rasmussen's invariant
$I^{\natural}(Y, K)$: reduced invariants
$\rightsquigarrow \mathbb{F}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$ を係数とする局所系係数ホモロジー
$I^{\#}(Y, K)$: unreduced invariants($\mathbb{Q}[T^{\pm 1}]$ 上の module)
$\rightsquigarrow \mathbb{F}[T_0^{\pm 1}, T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$ を係数とする局所系係数ホモロジー

$I^{\natural}$ と $I^{\natural}$ は $\mathscr{R}[x]$ 上の chain complex$(\hat{C}(Y, K, \Delta), \hat{d})$ から導き出される。

定理

$$I^{\natural}(Y, K) = \tilde{I}(Y, K)$$

KMの不変量

定理

$\mathbb{F}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$ を $\mathscr{T}[x]$-加群として、
$T \mapsto T_1,\ x \to P$, *where*
$P = T_1 T_2 T_3 + T_1^{-1} T_2^{-1} T_3 + T_1^{-1} T_2 T^{-1} + T_1 T_2^{-1} T_3^{-1}$
$I^{\natural}(Y, K)$ の局所系係数は

$$\hat{I}(Y, K, \Delta_{\mathscr{T}}) \otimes_{\mathscr{T}[x]} \mathbb{F}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$$

に同型。
$\mathbb{F}[T_0^{\pm 1}, T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$ を $\mathscr{T}[x]$-加群として、
$T \mapsto T_0, x \mapsto P$ として、
$I^{\#}$ の方の局所系係数は

$$\hat{I}(Y, K, \Delta_{\mathscr{T}}) \otimes_{\mathscr{T}[x]} \mathbb{F}[T_0^{\pm 1}, T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]^{\oplus 2}$$

に同型

Sasahira invariant との関係

Daemi-Scaduto's papers

§1 導入

§2 特異 $SU(2)$ ゲージ理論の復習

§3 フレアホモロジー

§4 特異インスタントン同変不変量

§5 同変不変量

§7 局所系係数・フィルトレーション

§8 KM のホモロジーとの関係

§9 計算例

Daemi Scaduto

$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}[x]/(x^2 + x + 1)$: $\mathscr{R}$-代数
where $T \mapsto x$

定理

$$I_*(K_{p,q}, \Delta_{\mathbb{F}_4}) \cong I_*(L(p, -q)) \otimes \mathbb{F}_4$$

ここで $\Delta_{\mathbb{F}_4}$ は $\Delta \otimes \mathbb{F}$ から

$$f : \mathbb{F}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}] \to \mathbb{F}_4$$

を
$U \mapsto 1, T \mapsto x$ によって得られる写像

結び目のホモロジーコンコーダンス不変量

$K \subset Y, K' \subset Y'$ がホモロジーコンコーダント
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $W : Y \to Y'$；ホモロジーコボルディズム
$S \subset W$ がシリンダーかつ $\partial S = -K \cup K'$ である。
$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$：ホモロジー球面内の結び目のコンコーダンス類
$\mathcal{T}$ を $\mathscr{R}$ 代数
特異フレアホモロジーの理論を用いて、準同型

$$h_{\mathcal{T}} : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$$

が定義できる。

定理

$\mathcal{T}$ を $\mathscr{R}$ 代数とする。このとき、$h_{\mathcal{T}}(Y,K)$ が定義できて、

- $h_{\mathcal{T}}(Y\#Y', K\#K') = h_{\mathcal{T}}(Y,K) + h_{\mathcal{T}}(Y',K')$
- (W,S) が *negative definite pair* なら、

$$h_{\mathcal{T}}(Y,K) \leq h_{\mathcal{T}}(Y',K')$$

が成り立つ。

(W,S) が negative deifnite pair
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(W,S):(Y,K)\to(Y',K')$：コボルディズムかつ $H_1(W,\mathbb{Z})=0$、かつ、$H_2(W,\partial W)$ で $4|[S]$ であり、W の double cover が negative definite

$\mathcal{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ の場合に焦点をあてる。$h_{\mathbb{Z}}(Y, K) = h(Y, K)$、$h_{\mathcal{T}}(S^3, K) = h_{\mathcal{T}}(K)$ とかく。

定理

- 全ての *2-bridge knot* は $h = 0$
- $h_{\mathcal{T}}(3_1)) = 1$
- $h(T(3,4)) = h(T(3,5)) = 1$
- いくつかのトーラス結び目は $h = 0$ となる

Daemi の方法

CS-filtration を用いて関数

$$\Gamma^{R}_{(Y,K)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

をを割り当てる。R：$\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ 上の代数となるような整域

定理

(Y, K)：ホモロジー球面内の結び目

1. $\Gamma^{R}_{(Y,K)}$ はホモロジーコンコーダンス不変量
2. $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して $\Gamma^{R}_{(Y,K)}(i) < \infty \Leftrightarrow i \leq h_R(Y, K)$
3. $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して、$\Gamma^{R}_{(Y,K)}(i) \notin \{0, \infty\}$ ならその値は、(Y, K) 上の既約な特異 $flatSU(2)$ 接続 CS 汎関数の値と一致する

問題

イデアル列から作って不変量 $\{J_i^T(Y,K)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と KM の不変量は関係あるか？

$g_4(K) = -\sigma(K)$ **の結び目なら正しい**

KM **との関係が分かる** Dami-Scaduto **のある提案**

§2 特異 $SU(2)$ ゲージ理論の復習

Y：ホモロジー球面
$K \subset Y$：結び目
$E \to Y$：rank=2 エルミート v.b(構造群は $SU(2)$)
$E|_K = L \oplus L^*$
$L \to K$：K 上のエルミート直線束
$K \subset S^1 \times D^2$：K の近傍
$D^2 \ni (r, \theta)$：極座標
$\lambda_0 = b(r)\frac{1}{4} id\theta$
ここで、
$b(r)$：bump 関数 $b(r) = 1 (r < 1/2), b(r) = 0 (r > 1)$
$\lambda_0 \in \Omega^1(Y - K, i\mathbb{R})$
$B_0 = \lambda_0 \oplus \lambda_0^*$ は $E|_{Y-K}$ 上の接続
B_0 の K の周りのホロノミーは $\mathbb{Z}/4$ に値を持つ。
B_0^{ad} を $\mathfrak{g}_E = P \times_{ad} \mathfrak{su}(2)$ （adjoint bundle）上の接続とする
B_0^{ad} のホロノミーは $\mathbb{Z}/2$。

$$\mathscr{C}(Y, K) = B_0 + \check{L}^2_{k, B_0^{ad}}(\check{Y}, \check{\Lambda}^1 \otimes \check{\mathfrak{g}}_E)$$

$$\mathscr{G}(Y, K) = \check{L}^2_{k+1, B_0^{ad}}(\check{Y}, Aut(\check{\mathfrak{g}}_E))$$

$$\mathscr{B}(Y, K) = \mathscr{C}(Y, K)/\mathscr{G}(Y, K)$$

Chern-Simons 汎関数

$$CS : \mathscr{C}(Y, K) \to \mathbb{R}$$

$$(gradCS)_B = \frac{1}{4\pi^2} * F_B$$

$$CS(B) - CS(g(B)) = 2k + l$$

$\rightsquigarrow CS : \mathscr{B}(Y, K) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
(constant **を除いて**)
下の θ **において** $CS(\theta) = 0$ **としておけばこの** ambiguity **は除ける。**

$$d : \pi_0(\mathscr{G}(Y, K)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$d(g) = (k, l)$
$\mathscr{G}(Y, K)) \cong Map((Y, K), (SU(2), U(1)))$

$$k \in [Y, SU(2)] \cong \mathbb{Z}, l \in [K, U(1)] \cong \mathbb{Z}$$

$\mathfrak{C} \subset \mathscr{B}(Y, K)$：flat **接続の同値類**
μ：K **の** meridian loop

$$\mathscr{X}(Y, K) = \{\rho : \pi_1(Y \setminus K) \to SU(2) | tr(\rho(\mu)) = 0\}/SU(2)$$

$\theta \in \mathscr{B}(Y, K)$：flat reducible（$\mathscr{G}_\theta = U(1)$：stabilizer）
$\theta : \pi_1(Y \setminus K) \to SU(2)$ **を**
$Hol(\theta) = \{\pm 1, \pm i\} \subset SU(2)$ **を満たす唯一の共役元**

$$\pi_1(Y \setminus K) \to H_1(Y \setminus K) \to U(1) \subset SU(2)$$

のように factorize **する。**

$\theta \in \mathfrak{C}$ **は、孤立かつ** non-degenerate

flip symmetry

ξ：$Y \setminus K$ 上の -1 をホロノミーをもつ接続 over $\mathbb{Z}/2$-bundle （KM の embedded surface の Lemma2.12）

$\xi \in H^1(Y \setminus K, \mathbb{Z}/2)$ (generator)

$\iota : \mathscr{B}(Y, K) \to \mathscr{B}(Y, K)$

を $\iota[B] = [B \otimes \xi]$

つまり、ホロノミーについて

$\rho : \pi_1(Y \setminus K) \to SU(2)$ に対して、

$\rho \mapsto \rho \cdot \chi_\mu$ となる。

ここで $\chi_\mu : \pi_1(Y \setminus K) \to \{\pm 1\}$

$\alpha \in \mathfrak{C}$ において ι で保たれることと α が $\mathscr{X}(Y, K)$ において、binary dihedral in $SU(2)$ に共役であることは同値である。

binary dihedral $S^1 \cup S^1 \cdot j$, where $j = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

臨界点の摂動

$q : S^1 \times D^2 \to Y \setminus K$ smooth immersion
$z \in D^2$ に対して $q(-, z)$ は、path in $Y \setminus K$
$B \in \mathscr{C}(Y, K)$ に対して、$Hol_{q(-,z)}(B) \in (G_E)_{q(0,z)}$ よって、
$G_E \to Y$：bundle で
$\Gamma(G_E) \subset \mathscr{G}(Y, K)$
$q^*(G_E)$：D^2 上の bundle
$\rightsquigarrow Hol_q(B)$：$D^2$ 上の q^*G_E の section

$\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_r)$：immersion の tuple ($\exists\eta > 0$ st $[-\eta, \eta] \times D^2$ 上で一致する)
$q_j(G_E)$ は $[-\eta, \eta] \times D^2$ で同型
$Hol_{\mathbf{q}}(B)$：D^2 上の bundle $q_1^*(G_E^r)$ の section
$h : SU(2)^r \to \mathbb{R}$：diagonal adjoint action 不変な滑らかな関数

$B \in \mathscr{C}(Y, K)$ に対して、シリンダー関数を次のように定義

$$f_{\mathbf{q}}(B) = \int_{D^2} h(Hol_{\mathbf{q}}(B))\mu$$

μ：D^2 上の non-negative 2-form $\int_{D^2} \mu = 1$

$$f_{\mathbf{q}} : \mathscr{C}(Y, K) \to \mathbb{R}$$

を与える。C_i ある列
$\mathscr{P} = \{(a_i) | \sum_{i=1}^{\infty} C_i a_i < \infty\}$ の完備化。(Banach 空間)
$(f_{\mathbf{q}_i})$：cylinder func の列
$\pi = (\pi_i) \in \mathscr{P}$ に対して、

$$f_\pi := \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i f_{\mathbf{q}_i}$$

$\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ (reducible connection が perturb されないようにする。)

命題

$\exists \mathscr{P} \subset \mathscr{P}'$: *residual subset*
十分小さい $\pi \in \mathscr{P}'$
$\mathfrak{C}_\pi^{irr}$: *perturbed CS-*汎関数の既約な臨界点の集合
$\mathfrak{C}_\pi^{irr}$ は *finite* かつ *non-degenerate* となる。

$\pi \in \mathscr{P}'$ に対して

$$CS + f_\pi : \mathscr{C}(Y, K) \to \mathbb{R}$$

を perturbed CS-functional という

$M \subset \mathscr{B}(Y, K)$ において $\mathscr{P}'$ において作られた perturbed function は $C^\infty(M)$ において dense であるから

$Z = \mathbb{R} \times Y$
$S = \mathbb{R} \times K$
Z **上の接続** $(t \in \mathbb{R})$

$$A = B(t) + C(t)dt$$

$B(t)$ **:** Y **上の** singular $SU(2)$-connection
$C(t)$ **:** $\check{L}^2_k(\check{Y}, \check{\mathfrak{g}}_E)$-**切断**
$\alpha_i = [B_i] \in \mathfrak{C}^{irr} \quad (i = 1, 2)$
$\hat{V}_\pi(A) = P_+(dt \wedge V_\pi(A))$

$$V_\pi = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i grad(f_i)$$

singular instanton on Z

$$F_A^+ + \hat{V}_\pi(A) = 0$$

を満たす A

A_0：**無限遠点で** B_1, B_2 **の** pull back **に一致する** $\mathbb{R} \times Y$ **上の** singular instanton
A：singular instanton on Z **とする** (compact set **の外側では** constant)。
$A \rightsquigarrow \gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{B}(Y, K)$：$\alpha_1$ **から** α_2 **への道**
$z = [\gamma] \in \pi_1(\mathscr{B}(Y, K), \alpha_1, \alpha_2)$

$$\mathscr{C}_\gamma(Z, S, B_1, B_2) = \left\{ A | A - A_0 \in \check{L}^2_{k, A_0^{ad}}(\check{Z}, \check{\mathfrak{g}}_E \otimes \check{\Lambda}^1) \right\}$$

$$\mathscr{G}_\gamma(Z, S, B_1, B_2) = \{ g \in \check{L}^2_{k+1, A_0}(Aut(E)) | \nabla_{A_0} g \in \check{L}_{k, A_0} \}$$

$$\mathscr{B}_z(Y, K; \alpha_1, \alpha_2) = \mathscr{C}_\gamma(Z, S, B_1, B_2)/\mathscr{G}_\gamma(Z, S, B_1, B_2)$$

$\pi \in \mathcal{P}'$ **：摂動**

$$M_z(\alpha_1, \alpha_2) = \{[A] \in \mathscr{B}_z(Y, K; \alpha_1, \alpha_2) | F_A^+ + \hat{V}_\pi(A) = 0\}$$

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = \coprod_{z \in \pi_1(\mathscr{B}(Y,K),\alpha_1,\alpha_2)} M_z(\alpha_1, \alpha_2)$$

$\check{M}(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2)/\mathbb{R}$

このとき、次の grading **が定義できる。**

$$gr_z(\alpha, \alpha') = \mathrm{ind}(\mathscr{D}_A) = v.\dim(M_z(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}$$

となる。

ASD 方程式の線形化作用素 (with gauge fixing)

$$\mathscr{D}_A : \check{L}^2_{k,A^{ad}}(\check{Z}, \check{\mathfrak{g}}_E \otimes \check{\Lambda}^1) \to \check{L}^2_{k-1,A^{ad}}(\check{Z}, \check{\mathfrak{g}}_F \otimes (\check{\Lambda}^0 \oplus \check{\Lambda}^+))$$

$$\mathscr{D}_A := -d_A^* \oplus (d_A^+ + D\hat{V}_\pi)$$

$d_A^+ + D\hat{V}_\pi$ が全射の時、$[A] \in M_z(\alpha, \beta)$ を regular という
任意の $A \in M_z(\alpha, \alpha')$ に対して regular のとき、$M_z(\alpha, \alpha')$ が regular という。

$M(\alpha_1, \alpha_2)$ は regular ならば $gr_z(\alpha_1, \alpha_2)$ 次元多様体となる。
$M_z(\alpha_1, \alpha_2)_d$: $gr_z(\alpha_1, \alpha_2) = d$ となる $M_z(\alpha_1, \alpha_2)$ の成分
$\check{M}_z(\alpha_1, \alpha_2)_{d-1} = M_z(\alpha_1, \alpha_2)_d / \mathbb{R}$

$\alpha_1\alpha_2$ のどちらからが reducible である場合、

$$M_z(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$= \{A \in A_0 + e^{-\epsilon|t|}\check{L}^2_{k,A_0^{ad}}(\check{Z}, \check{\mathfrak{g}}_E \otimes \check{\Lambda}^1)|A : \text{sol of ASD}\}/gauge$$

とすると、$\mathscr{D}_A$ が定義できて、
$gr_z(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{ind}(\mathscr{D}_A)$
となる

命題

$\pi_0 \in \mathcal{P}'$ が $\mathfrak{C}_{\pi_0} = \{\theta\} \cup \mathfrak{C}^{irr}_{\pi_0}$ が *non-degenerate* であるような摂動であるとする。この時、$\exists \pi \in \mathcal{P}'$ が次を満たす。

- $CS + f_{\pi_0}$ の *cp* のある近傍で、$f_\pi = f_{\pi_0}$
- $\mathfrak{C}_\pi = \mathfrak{C}_{\pi_0}$
- $M_z(\alpha_1, \alpha_2)$ は、全て *regular*

命題 (コンパクト性)

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi$ としたとき、$M_z(\alpha_1, \alpha_2)$ の次元が 4 より小さいとき、*unparametrized broken trajectory* の空間 $\check{M}^+_z(\alpha_1, \alpha_2)$ はコンパクト

KM の Proposition 3.22

ここで、unparametrized broken trajectory とは、$\exists l$ に対して、
$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_l$ として、
$\{\{[A_i]\}_{i=1}^{l} | A_i \in \check{M}_{z_i}(\beta_i, \beta_{i+1}) | i = 1, \cdots, l-1\}$
$M_z(\alpha_1, \alpha_2)$ の境界。

命題 (コンパクト性)

$d \geq 0$ の時、有限個の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi$ と z に対して存在して、
$M_z(\alpha_1, \alpha_2) \neq \emptyset$ かつ $M_z(\alpha_1, \alpha_2) = d$ となる。

$\check{M}(\alpha_1, \alpha_2)_0$ は有限個の点

grading について

$g \in \mathscr{G}(Y, K)$ に対して、$d(g) = (k.l)$ とし、
$z \in \pi_1(\mathscr{B}(Y, K), \alpha)$ を $\alpha \in \mathscr{B}(Y, K)$ に対して、B から $g(B)$ をつなぐ path とする。

$$gr_z(\alpha, \alpha) = 8k + 4l$$

である。(KM の Lemma3.14)
α_2 : non-degenerate & irre

$$gr_{z_{12}}(\alpha_1 \alpha_2) + gr_{z_{23}}(\alpha_2, \alpha_3) = gr_{z_{13}}(\alpha_1, \alpha_3)$$

$z_{13} = z_{23} \circ z_{12}$
よって、gr_z は $\mathbb{Z}/4$ にすることで、z によらない grading

$$gr(\alpha) = gr_z(\alpha, \theta) \bmod 4$$

(absolute grading)

α_2：reducible とする
このとき、

$$gr_{z_{12}}(\alpha_1, \theta) + 1 + gr_{z_{23}}(\theta, \alpha_3) = gr_{z_{13}}(\alpha_1, \alpha_3)$$

命題

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}$ に対して、もし、$M_z(\alpha_1, \alpha_2)$ の次元が 3 より小さいとすると、$\check{M}_z^+(\alpha_1, \alpha_2)$ は、θ をとおる *broken trajectories* を持たない。

$[A_1], \cdots, [A_{l-1}]$ が N 回 reducible を通るとする。
$gr_z(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^{l-1} gr_{z_i}(\beta_i, \beta_{i+1}) + N \geq l - 1 + N \geq 3$
より、$gr_z(\alpha_1, \alpha_2) \geq 3$ でなければならない。

コボルディズム上のモジュライ空間

シリンダー上の方程式をコボルディズムの場合に拡張する。

Y, Y' **ホモロジー球面、** $K \subset Y, K' \subset Y'$ **結び目**
コボルディズム
(S **において、**cone angle π **をもつ** orb metric **をもつ**)

$$(W, S) : (Y', K') \to (Y', K')$$

$S \hookrightarrow W$ (**向きづけられた連結な曲面**
(K **から** K' **へのコボルディズム**)
$\widetilde{W} : W$ **の** S **に沿った二重分岐被覆**
$\alpha \in \mathscr{B}(Y, K)$ $\alpha' \in \mathscr{B}(Y', K')$
(W^+, S^+) **:** (W, S) **に** cylindrical end **を付け加えたもの**

A **:** (W^+, S^+) **上の** $SU(2)$**-接続で、上側のシリンダーで** α, α' **の** pull back **に一致するもの。**

z：A の両側を α, α' に固定した $A \mod (\text{gauge})$ のホモトピークラス
$\mathscr{B}_z(W, S, \alpha, \alpha')$：singular connection のゲージ同値類の集合

$$M_z(W, S, \alpha, \alpha') \subset \mathscr{B}_z(W, S, \alpha, \alpha')$$

α, α' のどちらかが reducible なら weighted Sobolev 空間を用いる。

(perturbed)ASD 方程式

$$F_A^+ + \psi(t)\hat{V}_\pi(A) + \psi_0(t)\hat{V}_{\pi_0}(A) = 0$$

のモジュライ空間

$\psi(t)$：$\psi(t) = 1(t < 0)$, $\psi(t) = 1(t = 1)$
$\psi_0(t)$：$\text{supp}(\psi_0) \subset (0, 1)$

generic perturbation **をとれば、** d **次元の多様体**

$$d = ind(\mathscr{D}_A) =: gr_z(W, S, \alpha, \alpha')$$

$$\mathscr{D}_A = d_A^+ + D(\textbf{摂動項})$$

$$M(W, S, \alpha, \alpha')_d = \cup_{gr_z(W,S,\alpha,\alpha')=d} M_z(W, S, \alpha, \alpha')$$

$$(W'', S'') = (W', S') \circ (W, S) : (Y, K) \to (Y', K') \to (Y'', K'')$$

$$gr_z(W, S, \alpha, \alpha') + \dim(Stab(\alpha')) + gr_{z'}(W', S', \alpha', \alpha'')$$
$$= gr_z(W'', S'', \alpha, \alpha'')$$

unprametrized broken trajectory

$M_z(W, S, \alpha, \alpha')$ に対して、$\beta \in \mathfrak{C}(Y, K)$, $\beta' \in \mathfrak{C}(Y', K')$ に対して、
$M_{z_2}(W, S, \beta, \beta')$, $\check{M}^+_{z_1}(\alpha, \beta)$, $\check{M}^+_{z_3}(\beta', \alpha')$
を用いて、

$$z = z_3 \circ z_2 \circ z_1$$

となるもの。
$\check{M}^+_z(W, S, \alpha, \alpha')$ とかく。

energy, monopole number

$[A] \in \mathscr{B}_z(W, S, \alpha, \alpha')$ に対して、
(Topological energy)

$$\kappa(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{W^+ \setminus S^+} Tr(F_A \wedge F_A)$$

$\kappa(A) \geq 0$ かつ ($\kappa(A) = 0 \Leftrightarrow A$ が flat)

$$2\kappa(A) = CS(\alpha) - CS(\alpha') - \frac{1}{8} S \cdot S \bmod \mathbb{Z}$$

S：divisible by 4 とすると最後の項を無視できる
(Monopole number)

$$\nu(A) := \frac{i}{\pi} \int_{S^+} \Omega$$

ここで、

$$F_A|_{S^+} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{bmatrix}$$

$S \in H_2(W, \mathbb{Z})$ が 2-multiplicity を持つとき、flip symmetry は W に拡張する。
(flip symmetry)

$$\kappa(\iota A) = \kappa(A),\ \ \nu(\iota A) = -\nu(A)$$

(W, S) 上の reducible connection はどのように振る舞うか？

補題

$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K)$：コボルディズムとする。
$[A] \in \mathscr{B}_z(W, S, \theta, \theta')$ のとき、

$$ind(\mathscr{D}_A) = 8\kappa(A) - \frac{3}{2}(\sigma(W) + \chi(W))$$

$$+\chi(S) + \frac{1}{2}S \cdot S + \sigma(K) - \sigma(K') - 1$$

境界が 1 つだけのもの (X, Σ) とする。
$[\Sigma] = 0 \in H_2(X, \partial X)$
$\pi : \tilde{X} \to X$: double branched cover along Σ
$\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$: covering transformation
A_0 : X 上の flat connection s.t. $\pi^*(A_0)$ が $\tilde{X}$ 上の trivial conn.

$$((v_1, v_2, v_3), x) \in \mathbb{R}^3 \times \tilde{X} \mapsto ((v_1, -v_2, -v_3), \tau(x))$$

この商は、X 上の orbifold connection を与える。

計算

$ker(\mathscr{D}_{A_0}) \cong H^1_+(\tilde{X}) \oplus H^1_-(\tilde{X})^{\oplus 2}$
$coker(\mathscr{D}_{A_0}) \cong H^+_+(\tilde{X}) \oplus H^+_-(\tilde{X})^{\oplus 2} \oplus H^0(\tilde{X})$

$\tau_* : H^i(\tilde{X}) \to H^i(\tilde{X})$
$\tau_*^2 = 1$
$\pi_* : H^i(X) \to H^i(\tilde{X})$

$$ind(\mathscr{D}_{A_0}) = -(\sigma(\tilde{X}) + \chi(\tilde{X})) + \frac{1}{2}(\sigma(X) + \chi(X)) - \frac{1}{2}$$

K の Seifert surface Σ **を** $Y \times I \subset W$ **に押し込めて考える**

$\sigma(\tilde{X}) = 2\sigma(X) + \sigma(K)$

$\chi(\tilde{X}) = 2\chi(X) - \chi(\Sigma)$

となる。

代入して、

$$ind(\mathscr{D}_{A_0}) = -\frac{3}{2}(\sigma(X) + \chi(X)) - \sigma(K) + \chi(\Sigma) - \frac{1}{2}$$

(Y', K') を向きを逆にして、同じように (X', Σ') を用意する。

$$ind(\mathscr{D}_{A'_0}) = -\frac{3}{2}(\sigma(X') + \chi(X')) + \sigma(K') + \chi(\Sigma') - \frac{1}{2}$$

(X, Σ) と (W, S) と (X', Σ') をくっつけることで closed pair $(\overline{W}, \overline{S})$ 上の connection $\overline{A}$ が得られる。
$\kappa(A) = \kappa(\overline{A})$, $\nu(\overline{A}) = \nu(A)$

$$ind(\mathscr{D}_{\overline{A}}) = ind(\mathscr{D}_{A_0}) + ind(\mathscr{D}_{A}) + ind(\mathscr{D}_{A'_0}) + 2$$

Closed case(KM: Gauge theory for embedded surfaces I)

$$ind(\mathscr{D}_{\overline{A}}) = 8\kappa(\overline{A}) + 4\nu(\overline{A}) - 3(b^+(\overline{W}) - b^1(\overline{W}) + 1) + \chi(\overline{S})$$

$$
\begin{aligned}
ind(\mathscr{D}_A) &= ind(\mathscr{D}_{\overline{A}}) - (ind(\mathscr{D}_{A_0}) + ind(\mathscr{D}_{A_0'})) - 2 \\
&= 8\kappa(A) + 4\nu(\overline{A}) - \frac{3}{2}(\sigma(\overline{W}) + \chi(\overline{W})) + \chi(\overline{W}) \\
&\quad + \frac{3}{2}(\sigma(X) + \chi(X)) + \sigma(K) - \chi(\Sigma) + \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{3}{2}(\sigma(X') + \chi(X')) - \sigma(K') - \chi(\Sigma') + \frac{1}{2} - 2 \\
&= 8k(A) + 4\nu(A) - \frac{3}{2}(\sigma(W) + \chi(W)) + \chi(S) + \sigma(K) - \sigma(K') - 1
\end{aligned}
$$

□

$4\nu(A) = \frac{1}{2} S \cdot S$?

命題

(W,S)：**コボルディズム**
$\pi:\tilde{W}\to W$：*double branched cover*
A：*singular connection on* (W,S)
π^*A^{ad} **が** *regular* **なら** A **も** *regular*
特に、$\pi^*(A^{ad})$ **が** *trivial* **かつ** $b^+(\tilde{W})=0$ **なら** A **は** *regular*

$$coker(d_A^+)=b_+^+ + 2b_-^+$$

$H_1(W,\mathbb{Z})=0, b^(W)=0$ を仮定する。
$S\subset W$：orientable, genus$=g$
$[S]$：multiplied by 4 $M_z(W,S,\theta,\theta')$ の reducible ele は、
$L\to W$：a $U(1)$-bundle
の同型類と同じ。
(reducible singular connection)
$A_L=\eta\oplus\eta^*$ とおく。
η：reducible ASD conn on $W^+\setminus S^+$ 上の L に定義される
S の meridian に沿った holonomy$\to i$ as $\epsilon\to 0$
ここで、
$\kappa(A_L)=-(c_1(L)+\frac{1}{4}S)\cdot(c_1(L)+\frac{1}{4}S)$
$\nu(A_L)=2(c_1(L)+\frac{1}{4}S))+\frac{1}{2}S\cdot S$
$c_1(L)+\frac{1}{4}S$：non-torsion なら $\kappa(A)>0$ であるから、
$H_1(W,\mathbb{Z})=0$ なら $H^2(W,\mathbb{Z})$ は non-torsion
$\Rightarrow\kappa(A_L)=\nu(A_L)=0$ となる reducible instanton が唯一存在。

$b_1(W) = 0, b_2^+(W) = 0$ **より、** $\sigma(W) + \chi(W) = 0$
また、

$$\sigma(\tilde{W}) = 2\sigma(W) - \sigma(K) + \sigma(K') - \frac{1}{2} S \cdot S$$

$$\chi(\tilde{W}) = 2\chi(W) - \chi(S)$$

より、

$$ind(\mathscr{D}_{A_L}) = 8\kappa(A_L) - 2g + \frac{1}{2} S \cdot S + \sigma(K) - \sigma(K') - 1$$

$$= 8\kappa(A_L) - (\chi(\tilde{W}) + \sigma(\tilde{W})) + 2(\chi(W) + \sigma(W)) - 1$$

$$= 8\kappa(A_L) + 2(b_1(\tilde{W}) - b^+(\tilde{W})) - 1$$

定義

$$(W,S):(Y,K)\to(Y',K')$$

が *negative definite pair*
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ (W,S) **が** (Y,K) **から** (Y',K') **の間のコボルディズムかつ、以下を満たす。**

$$\begin{cases} H_1(W,\mathbb{Z})=0,\ b^+(W)=0 \\ [S]\text{ : } \textit{divisible by } 4 \\ b^+(\widetilde{W})=0 \end{cases}$$

上の等式より、(W,S) **が** negative definite pair **なら**

$$ind(\mathscr{D}_A)=8\kappa(A_L)-1$$

$b^+(\widetilde{W}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sigma(K') = \sigma(K) + \frac{1}{2} S \cdot S + \chi(S)$$

$A_L = A_0$: flat & reducible **のとき、** $ind(\mathscr{D}_D) = -1$
(regular, 1-dimensional stab.)

例

$([0,1]\times Y, [0,1]\times K)$ は *negative definite pair*
$(W,S):(Y,K)\to(Y',K')$ がホモロジー *concordance* は *negative definite pair*

ASD 方程式の perturb を十分小さくとって、$M(W,S,\theta,\theta')_0$ は、unique な regular reducible を含む。
(vanishing κ and ν)

臨界点の数え上げること

定理 (Herald)

Y：ホモロジー球面
$K \subset Y$ 結び目
π：*small perturbation*
$\mathfrak{C}_\pi$ を *non-degenerate* とする。そのとき、

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{C}_\pi} (-1)^{gr(\alpha)} = 4\lambda(Y) + \frac{1}{2}\sigma(K)$$

§3 結び目のインスタントンフレアホモロジー

Y：ホモロジー球面、$K \subset Y$ 結び目

$\mathfrak{C}_\pi = \{\theta\} \cup \mathfrak{C}_\pi^{irr}$

（non-degenerate, finite **かつ** $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi$ **に対して** $M(\alpha_1, \alpha_2)$ **は** regular。）

$$C(Y, K) = \oplus_{\alpha \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}} \mathbb{Z} \cdot \alpha$$

定義

$$d(\alpha_1) = \sum_{\alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}, gr(\alpha_1, \alpha_2) = 1} \# \check{M}(\alpha_1, \alpha_2)_0 \alpha_2$$

向きを込めて

$$C(Y, K) = \oplus_{\alpha \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}} \mathbb{Z} \cdot \Lambda(\alpha)$$

とする必要があるが、ここではしない。

$d^2 = 0 \rightsquigarrow C(Y, K)$ が複体。
通常のフレアホモロジーの議論
$\check{M}_z(\alpha_1, \alpha_2)_1$ が $\check{M}^+(\alpha_1, \beta)_0 \times \check{M}^+(\beta, \alpha_2)$
に一致するなど。
既約インスタントンホモロジー

$$I_*(Y, K) = H_*(C(Y, K), d)$$

$\mathbb{Z}/4$-graded homology
$c.f.$: $I(Y)$: $\mathbb{Z}/8$-graded homology

定理

$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$ に対して、

$$\lambda(\alpha) = \sum_{\substack{\alpha' \in \mathfrak{C}^{irr}_{\pi'} \\ gr(W,S,\alpha,\alpha')=0}} \#M(W, S, \alpha, \alpha')_0 \alpha'$$

とすると、*chain map*

$$\lambda_{(W,S)} : C(Y, K) \to C(Y', K')$$

が得られる。

$$d' \circ \lambda - \lambda \circ d = 0$$

$M^+(W, S, \alpha, \alpha')_1$ **の** boundary point **は** broken trajectory**。**

$$\coprod_{\beta' \in \mathfrak{C}^{irr}(Y', K')} M(W, S, \alpha, \beta')_0 \times \check{M}(\beta', \alpha')_0$$

$$\cup \coprod_{\beta \in \mathfrak{C}^{irr}(Y, K)} \check{M}(\alpha, \beta)_0 \times M(W, S, \beta, \alpha')_0$$

$$(W, S) = (W_2 \circ W_1, S_2 \circ S_1)$$

$$\lambda_{(W_2, S_2)} \circ \lambda_{(W_1, S_1)} - \lambda_{(W, S)} = d \circ \phi - \phi \circ d$$

(due to Donaldson **の教科書**)

$I(Y,K)$ **：計量、摂動によらない。**
negative definite pair

$$(W,S):(Y,K)\to(Y',K')$$

$$\lambda=\lambda_{(W,S)}:C(Y,K)\to C(Y',K')$$

Herald **の臨界点の数え上げからオイラー数の公式が導かれる。**

定理

$$\chi(I_*(Y,K))=4\lambda(Y)+\frac{1}{2}\sigma(K)$$

$C = C(Y, K)$、θ：自明接続

定義

$\delta_1 : C_1 \to \mathbb{Z}$ を

$$\delta_1(\alpha) = \#\breve{M}(\alpha, \theta)_0$$

$\delta_2 : \mathbb{Z} \to C_{-2}$

$$\delta_2(1) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{C}, gr(\alpha)=2} \#\breve{M}(\theta, \alpha)_0$$

$\delta_1 \circ d = d \circ \delta_2 = 0$

$\Delta_1 = \Delta_{1,(W,S)} : C(Y,K) \to \mathbb{Z}$

$$\Delta_1(\alpha) = \#M(W,S,\alpha,\theta')_0$$

$\Delta_{2,(W,S)} : \mathbb{Z} \to C(Y,K)$

$$\Delta_2(1) = \sum_{\alpha' \in \mathfrak{C}^{irr}_{\pi'}, gr(W,S,\theta,\alpha')=0} \#M(W,S,\theta,\alpha')_0$$

命題

$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$：*negative definite pair*

1. $\Delta_1 \circ d + \delta_1 - \delta_1' \circ \lambda = 0$
2. $d' \circ \Delta_2 - \delta_2' + \lambda \circ \delta_2 = 0$

Proof.

(1) $M(W, S, \alpha, \theta')_1$ の end をカウントをする。

$$\check{M}(\alpha, \beta)_0 \times M(W, S, \beta, \theta')_0, \quad M(W, S, \alpha, \beta')_0 \times \check{M}(\beta', \alpha')_0$$

$\check{M}(\alpha, \theta)_0$：$(W, S)$ が negative definite pair において reducible connection は唯一であった

(2) 同様 □

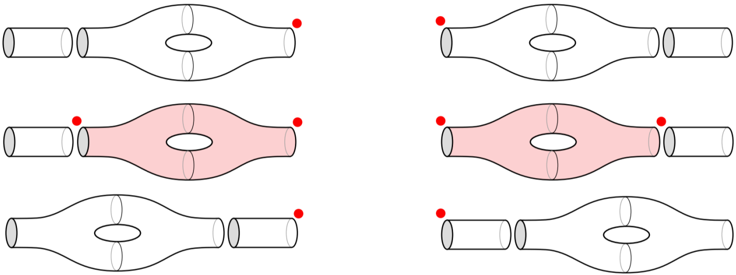


Figure 1: The relations (i) (left) and (ii) (right) of Proposition 3.10 .

ホロノミー作用素と ν-map
γ が閉曲線の場合

$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$ が negative definite pair
α, α' を既約な臨界点とする。
$\gamma \subset S$ を閉曲線とする
γ に沿った holonomy を与える写像をつくる
ν_S：S の法束からなる S^1-束
γ 上の S^1 束の自明化を固定
$[A] \in \mathscr{B}(W, S, \alpha, \alpha')$
A^{ad}：adjoint connection
A^{ad}_ϵ：ϵ-近傍の境界は ν_S と同型
$\pi^* A^{ad}$：ν_S 上の S^1-接続。
$A^{ad}_\epsilon \to A^{ad}_0$：$\epsilon \to 0$ の極限
A^{ad}_0：ν_S 上の S^1 接続。$\tilde{\gamma}$：γ の ν_S への a lift をとる

$\tilde{\gamma}$ に沿った A_0^{ad} の holonomy として

$$h^{\gamma}_{\alpha\alpha'} : \mathscr{B}(W, S, \alpha, \alpha') \to S^1$$

が定義できる。(gauge 変換によらない。)
base point, orientation of γ, lift $\tilde{\gamma}$, ν_S の fiber の orientation, などによらない。
γ の lift の変更は、$h^{\gamma}_{\alpha\alpha'}$ に ± 1 の作用が働く...
次の写像を定義する。

$$\mu : C(Y, K) \to C(Y', K')$$

μ を

$$\mu(\alpha) = \sum_{\alpha' \in \mathfrak{C}^{irr}_{\pi'}, gr(W,S,\alpha,\alpha')=1} deg(h^{\gamma}_{\alpha\alpha'}|_{M(W,S,\alpha,\alpha')_1})\alpha'$$

と定義する。

$h \in S^1$: generic
$(h^{\gamma}_{\alpha\alpha'})^{-1}(h) \cap M(W, S, \alpha, \alpha')_1$ は $M^+(W, S, \beta_1, \beta_2)_1$ の内部に support している。
$deg(h^{\gamma}_{\alpha\alpha'}|_{M(W,S,\alpha,\alpha')_1})$ は、その逆像の符号付きカウント

μ はチェイン写像

$$d' \circ \mu - \mu \circ d = 0$$

が成り立つ。
$\check{M}^+(\alpha, \beta)_0 \times M^+(W, S, \beta, \alpha')_1$
$M^+(W, S, \alpha, \beta')_1 \times \check{M}^+(\beta', \alpha')_{i-1}$

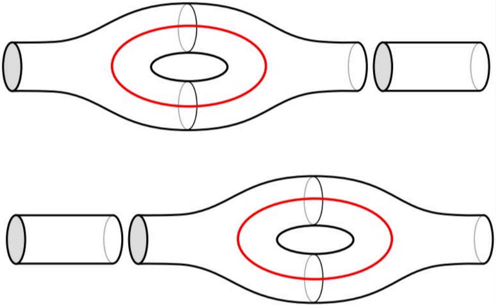


Figure 2: On the left is depicted relation (3.14);

ホロノミー作用素と v-map
シリンダーの場合の v-写像

$(W,S)=\mathbb{R}\times(Y,K)$ **のとき**
$y\in K$ **：起点。**
$\alpha_i\in\mathfrak{C}_\pi^{irr}$ **と** $[A]\in\mathscr{B}(Y,K,\alpha_1,\alpha_2)$ **に対して、** $\mathbb{R}\times\{y\}\subset S$ **に沿った** A^{ad} **のホロノミーを** $h_{\alpha_1\alpha_2}([A])$ **と定義する。**

$$h_{\alpha_1\alpha_2}:\mathscr{B}(Y,K,\alpha_1,\alpha_2)\to S^1$$

ASD 方程式の解に制限する

$H_{\alpha_1\alpha_2}:\check{M}(\alpha_1,\alpha_2)_d\to S^1$

$\check{M}^+(\alpha,\beta)$unparametrized broken trajectory **に拡張したい。**

$\check{M}^+(\alpha,\beta)$unparametrized broken trajectory に拡張する

(H1) $H_{\alpha_1\alpha_2} = 1$ if dim $\check{H}(\alpha_1,\alpha_2) = 0$.

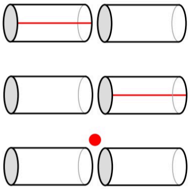
(H2) codimension 1 の顔 $\check{M}(\alpha_1,\beta)_{i-1} \times \check{M}^+(\beta,\alpha_2)_{d-i}$ 上で、$H_{\alpha_1\alpha_2} = H_{\alpha_1\beta} \circ H_{\beta\alpha_2}$

(H3) $gr(\alpha_1) = 1$ かつ $gr(\alpha_2) = 2$ のとき、(微妙に調整する)

定義

$v : C_* \to C_{*-2}$

$$v(\alpha_1) = \sum_{\alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}, gr(\alpha_1,\alpha_2)=2} deg(H_{\alpha_1\alpha_2}|_{\check{M}(\alpha_1\alpha_2)_1})\alpha_2$$



on the right, the relation of Proposition 3.16.

命題

$d \circ v - v \circ d - \delta_2 \circ \delta_1 = 0$

Proof.

$M := \{[A] \in \check{M}(\alpha_1, \alpha_2)_2 | H_{\alpha_1 \alpha_2}([A]) = h\}$

の end の boundary をカウントすることで得られる。 $\square$

ホロノミー作用素と v-map
γ がコボルディズムな道の場合

(W, S)：negative definite pair
$\gamma \subset S$：proper な interval
$\partial\gamma = \{p, p'\}$：$p \in K \subset Y,\ \ p' \in K' \subset Y'$
ホロノミーを以前と同じようにとる。

$$h^{\gamma}_{\alpha\alpha'} : \mathscr{B}(W, S, \alpha, \alpha') \to S^1$$

シリンダーの拡張として以下も得る。

$$\mu(\alpha) = \sum_{\alpha' \in \mathfrak{C}, gr(W,S,\alpha,\alpha')=1} \deg(H^{\gamma}_{\alpha\alpha'}|_{M(W,S,\alpha,\alpha')}) \cdot \alpha'$$

命題

$$d' \circ \mu + \mu \circ d + \Delta_2 \circ \delta_1 - \delta_2' - \delta_2' \circ \Delta_1 - v' \circ \lambda + \lambda \circ v = 0$$

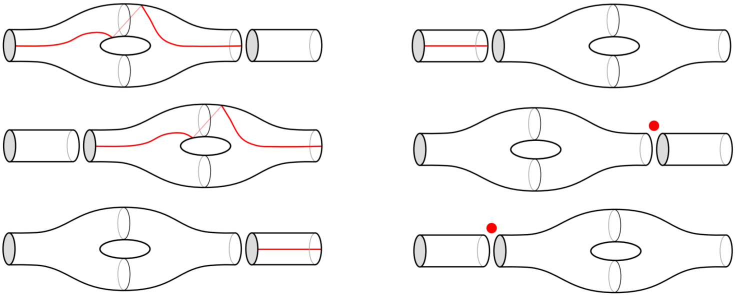


Figure 3: The relation of Proposition 3.19.

Framed instanton Floer homology

定義 ($\mathcal{S}$-複体)

$(\widetilde{C}_*, \tilde{d})$ が $\mathcal{S}$ 複体 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ (C, d) 鎖複体が存在して次数写像

- $v : C_* \to C_{*-2}$
- $\delta_1 : C_1 \to \mathbb{Z}$
- $\delta_2 : \mathbb{Z} \to C_{-2}$

$$\widetilde{C} = C_* \oplus C_{*-1} \oplus \mathbb{Z}_{(0)}$$

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ v & -d & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\tilde{C}, \tilde{d})$ が鎖複体

$\widetilde{d}^2 = 0$ を書き下すと

$$\begin{cases} d^2 = \delta_1 \circ d = d \circ \delta_2 = 0 \\ d \circ v - v \circ d - \delta_2 \circ \delta_1 = 0 \end{cases}$$

$\tilde{C}_* = C_* \oplus C_{*-1} \oplus \mathbb{Z},\ \tilde{C}'_* = C'_* \oplus C'_{*-1} \oplus \mathbb{Z}$

定義 ($\mathcal{S}$-複体の morphism)

$$\tilde{\lambda} : (\widetilde{C}_*, \widetilde{d}) \to (\widetilde{C}'_*, \widetilde{d}')$$

が *morphism* であるとは *degree zero chain map* が次を満たすこと。

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & \Delta_2 \\ \Delta_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda \circ d - d' \circ \lambda = 0 \\ \Delta_1 \circ d + \delta_1 - \delta'_1 \circ \lambda = 0 \\ d' \circ \Delta_2 - \delta'_2 + \lambda \circ \delta_2 = 0 \\ \mu \circ d + \lambda \circ v + \Delta_2 \circ \delta_1 - v' \circ \lambda + d' \circ \mu - \delta'_2 \circ \Delta_1 = 0 \end{cases}$$

定義 ($\mathcal{S}$-鎖ホモトピー)

$\widetilde{C}_* = C_* \oplus C_{*-1} \oplus \mathbb{Z}$
$\widetilde{C}'_* = C'_* \oplus C'_{*-1} \oplus \mathbb{Z}$

$\mathcal{S}$-複体

$(\widetilde{C}_*, \widetilde{d}) \to (\widetilde{C}'_*, \widetilde{d}')$ **が $\mathcal{S}$-チェインホモトピーである**
$\Leftrightarrow$ **チェインホモトピーであって**

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ L & -K & M_2 \\ M_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書かれる。
2 **つの $\mathcal{S}$-複体がチェインホモトピー同値であるとは、**
morphism $f : \tilde{C}_* \to \tilde{C}', g : \tilde{C}' \to \tilde{C}$ **が存在して、**
$f \circ g$ **と** $g \circ f$ **は** Id **に $\mathcal{S}$-チェインホモトピー同値。**

(Y, K) の場合に考える。$C(Y, K) = (C_*(Y, K), d)$ とする。
$p \in K$：v の定義のための起点。
次を framed instanton homology という。

$$\widetilde{C}(Y, K) = C_*(Y, K) \oplus C_{*-1}(Y, K) \oplus \mathbb{Z}$$

$\tilde{I}_*(Y, K) = H_*(\widetilde{C}(Y, K), \tilde{d})$ $\mathbb{Z}/4$-grading

§4 特異インスタントン同変不変量

定義 ($\mathcal{S}$ 複体の言い換え)

$\widetilde{C}_*$ が $\mathcal{S}$ 複体であるとは、次数付き有限生成自由アーベル群 $\widetilde{C}_*$ が $\tilde{d}:\tilde{C}_*\to\tilde{C}_{*-1}$ と $\chi:\tilde{C}_*\to\tilde{C}_{*+1}$ をもち次を満たす。

- $\tilde{d}^2=\chi^2=0,\ \chi\circ\tilde{d}+\tilde{d}\circ\chi=0$
- $\exists\mathbb{Z}\subset\widetilde{C}_0$ s.t. $ker(\chi)=im(\chi)\oplus\mathbb{Z}$

$C_*:=Im(\chi)$ とし、$d=-\tilde{d}|_{C_*}$ とすることで、複体 (C_*,d) が復活する。
$(\tilde{C},\tilde{d}),(\tilde{C}',\tilde{d}')$ を $\mathcal{S}$-複体とする。
$\tilde{\lambda}:\tilde{C}_*\to\tilde{C}'_*$ が degree zero かつ、
$\tilde{\lambda}\circ\tilde{d}=\tilde{d}'\circ\tilde{\lambda}$
$\tilde{\lambda}\circ\chi=\chi'\circ\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & \Delta_2 \\ \Delta_1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

としてこれらの複体の間の射が定義できる。(morphism なら $c = 1$ にする必要あり)

Remark

$\mathcal{S}$-複体ので出どころ

S^1 が e_0 以外に自由に単体的に作用する CW-複体 $(\tilde{C}, \tilde{d})$ をその chain 複体とすると、

$$\tilde{C}_* = C_* \oplus C_{*-1} \oplus \mathbb{Z}$$

のような分解をもつ。

同変ホモロジー

$(\widetilde{C}_*, \widetilde{d}, \chi)$

定義 ($\mathcal{S}$ 複体に同伴する同変ホモロジー)

$\widehat{C}_* = \mathbb{Z}[x] \otimes \widetilde{C}_*$

$$\widehat{d}(x^i \zeta) = -x^i \tilde{d}\zeta + x^{i+1} \cdot \chi(\zeta)$$

$\check{C}_* := (\mathbb{Z}[[x^{-1}, x]/\mathbb{Z}[x]) \otimes \widetilde{C}_*$

$$\check{d}(x^i \cdot \zeta) = x^i \cdot \tilde{d}\zeta - x^{i+1} \cdot \chi(\zeta)$$

$j : \check{C}_* \to \widehat{C}_{*-1}$ を次のように定義

$$j(x^k \xi) = \begin{cases} -\chi(\xi) & k = -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}$$

定義

$\overline{C}_* = \widetilde{C}_* \otimes \mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$

$$\overline{d}(x^i \cdot \zeta) = -x^i \cdot \tilde{d}\zeta + x^{i+1} \cdot \chi(\zeta)$$

x の次数は -2

$\zeta \in C_i$ のとき、$\deg(x^j \cdot \zeta) = -2j + i$

よって、$\hat{d}, \tilde{d}, \overline{d}$ は微分写像となり、これらは複体。

V_m：$\mathbb{Z}$-graded ベクトル空間

$\epsilon : V_* \to V_*$ が斉次元 a に対して $\epsilon(a) = (-1)^m a$ となる写像を次数写像という。ここで m は a の次数

次のような chain map triangle **は** exact triangle **を誘導する。**
((1) **を** large equivariant triangle **という。**

$$
\begin{tikzcd}
\check{C}_* \arrow[rr, "j"] & & \widehat{C}_* \arrow[dl, "i"] \\
& \overline{C}_* \arrow[ul, "p"] &
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\check{I}_* \arrow[rr, "j_*"] & & \widehat{I}_* \arrow[dl, "i_*"] \\
& \overline{I}_* \arrow[ul, "p_*"] &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C}_* \arrow[rr, "z"] & & \widehat{C}_* \arrow[dl, "x"] \\
& \widehat{C}_* \arrow[ul, "p"] &
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\widetilde{I}_* \arrow[rr, "z_*"] & & \widehat{I}_* \arrow[dl, "x_*"] \\
& \widehat{I}_* \arrow[ul, "p_*"] &
\end{tikzcd}
$$

i, p **は** grading **を保つ。**

$\deg(x) = -2$
$\det(y) = 0$：constant term への projection と sign map の合成。
$\deg(z) = 1$：$z = \chi$
$\tilde{\lambda} : \tilde{C}_* \to \tilde{C}'_*$
が射であれば、同変版への射も自然に誘導する。
合成の射があれば、同変版へも合成も自然に誘導する。

小同変複体

$(\widetilde{C}_*, \tilde{d}, \tilde{\chi})$：$\mathcal{S}$-複体 ($\mathbb{Z}[x]$ 加群)
$(\widehat{\mathfrak{C}}_*, \hat{\mathfrak{d}})$ $(\check{\mathfrak{C}}_*, \check{\mathfrak{d}})$ を定義する。

定義

$\widehat{\mathfrak{C}}_* = C_{*-1} \oplus \mathbb{Z}[x]$,

$$\hat{\mathfrak{d}}\left(\alpha, \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right) = \left(d\alpha - \sum_{i=0}^{N} v^i \delta_2(a_i), 0\right)$$

$\check{\mathfrak{C}}_* = C_* \oplus (\mathbb{Z}[[x^{-1}, x]/\mathbb{Z}[x])$

$$\check{\mathfrak{d}}\left(\alpha, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i\right) = \left(d\alpha, \sum_{i=-\infty}^{-1} \delta_1 v^{-i-1}(\alpha) x^i\right)$$

$\mathbb{Z}[x]$-module 構造は以下

$$x \cdot (\alpha, \sum_{i=0}^{N} a_i x^i) = (v\alpha, \delta_1(\alpha) + \sum_{i=0}^{N} a_i x^{i+1})$$

$$x \cdot (\alpha, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i) = (v\alpha + \delta_2(a_{-1}), \delta_1(\alpha) + \sum_{i=-\infty}^{-2} a_i x^{i+1})$$

定義

$\overline{\mathfrak{C}}_* = \mathbb{Z}[[x^{-1}, x],\ \overline{\mathfrak{d}} = 0$

$$\cdots \xrightarrow{\mathfrak{p}} \check{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{i}} \hat{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{j}} \overline{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{p}} \check{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{i}} \hat{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{j}} \overline{\mathfrak{C}}_* \xrightarrow{\mathfrak{p}}$$

を次の chain map として定義する。

$$\mathfrak{i}\left(\alpha, \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right) = \sum_{i=-\infty}^{-1} \delta_1 v^{-i-1}(\alpha) x^i + \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

$$\mathfrak{j}\left(\alpha, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i\right) = (\alpha, 0)$$

$$\mathfrak{p}\left(\sum_{i=-\infty}^{N} a_i x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{N} v^i \delta_2(a_i), \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i\right)$$

次の exact triangle **を誘導する。**

$$\begin{tikzcd} H(\check{\mathfrak{C}}_*, \check{d}) \arrow[rr, "\mathfrak{j}_*"] & & H(\hat{\mathfrak{C}}_*, \hat{d}) \arrow[dl, "\mathfrak{i}_*"] \\ & \overline{\mathfrak{C}}_* \arrow[ul, "\mathfrak{p}_*"] & \end{tikzcd}$$

$\hat{\Phi} : \hat{C}_* \to \hat{\mathfrak{C}}_*, \check{\Phi} : \check{C}_* \to \check{\mathfrak{C}}_*, \overline{\Phi} : \overline{C}_* \to \overline{\mathfrak{C}}_*$ を

$$\hat{\Phi}\left(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i, \sum_{i=0}^{N} \beta_i x^i, \sum_{i=0}^{N} a_i x_i\right)$$

$$:= \left(\sum_{i=0}^{N} v^i(\beta_i), \sum_{i=0}^{N} a_i x_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{i-1} \delta_1 v^j(\beta_i) x^{i-j-1}\right)$$

$$\check{\Phi}\left(\sum_{i=-\infty}^{-1} \alpha_i x^i, \sum_{i=-\infty}^{-1} \beta_i x^i, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x_i\right)$$

$$:= \left(\alpha_{-1}, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i, \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_1 v^j(\beta_i) x^{i-j-1}\right)$$

$$\overline{\Phi}\left(\sum_{i=-\infty}^{N} \alpha_i x^i, \sum_{i=-\infty}^{N} \beta_i x^i, \sum_{i=-\infty}^{N} a_i x_i\right)$$

$$:= \sum_{i=-\infty}^{N} a_i x_i + \sum_{i=-\infty}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_1 v^j(\beta_i) x^{i-j-1}$$

$\hat{\Psi} : \hat{\mathfrak{C}}_* \to \hat{C}_*, \check{\Psi} : \check{\mathfrak{C}}_* \to \check{C}_*, \overline{\Psi} : \overline{\mathfrak{C}}_* \to \overline{C}_*$ を

$$\hat{\Psi}\left(\alpha, \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right) := \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{i-1} v^j \delta_2(a_i) x^{i-j-1}, \alpha, \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)$$

$$\check{\Psi}\left(\alpha, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i\right)$$

$$:= \left(\sum_{i=-\infty}^{-1} v^{-i-1}(\alpha) x^i + \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} v^j \delta_2(a_i) x^{i-j-1}, 0, \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i\right)$$

$$\bar{\Psi}\Big(\sum_{i=-\infty}^{N} a_i x^i\Big) := \Big(\sum_{i=-\infty}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} v^j \delta_2(a_i) x^{i-j-1}, 0, \sum_{i=-\infty}^{N} a_i x^i\Big)$$

このとき、

$$\hat{\Phi}\circ\hat{\Psi} = id, \check{\Phi}\circ\check{\Psi} = Id, \overline{\Phi}\circ\bar{\Psi} = Id$$

また、

$$\hat{\Phi}\circ x = x\circ\hat{\Phi}, \check{\Psi}\circ x = x\circ\check{\Psi},\ \bar{\Phi}\circ x = x\circ\bar{\Phi}, \bar{\Psi}\circ x = x\circ\bar{\Psi}$$

$$\hat{\Phi}\circ j = \mathfrak{j}\circ\check{\Phi}, \hat{\Psi}\circ\mathfrak{j} = j\circ\check{\Psi}, \bar{\Phi}\circ i = \mathfrak{i}\circ\hat{\Phi}, \check{\Psi}\circ\mathfrak{p} = p\circ\bar{\Psi}$$

$$x \circ \hat{\Psi} - \hat{\Psi} \circ x = \hat{d}\hat{K}_x + \hat{K}_x \hat{\mathfrak{d}}, \quad x \circ \check{\Phi} - \check{\Phi} \circ x = \check{\mathfrak{d}}\check{K}_x + \check{K}_x \check{d}$$

$$\bar{\Psi} \circ i - \mathfrak{i} \circ \hat{\Psi} = \tilde{d} K_{\mathfrak{i}} + K_{\mathfrak{i}} \hat{\mathfrak{d}}, \quad \check{\Phi} \circ p - \mathfrak{p} \circ \bar{\Phi} = \check{\mathfrak{d}} K_{\mathfrak{p}} - K_{\mathfrak{p}} \circ \bar{d}$$

$$\hat{\Phi} \circ \hat{\Psi} - id = \hat{d}\hat{K} + \hat{K}\hat{d}$$

$$\check{\Phi} \circ \check{\Psi} - id = \check{d}\check{K} + \check{K}\hat{d}$$

$$\bar{\Phi} \circ \bar{\Phi} - id = \bar{d}\bar{K} + \bar{K}\bar{d}$$

となる。

$\tilde{\lambda} : \tilde{C}_* \to \tilde{C}'$ を $\mathcal{S}$-複体の射とする。
このとき、
$\hat{\mathfrak{m}}_{\tilde{\lambda}} : \hat{\Phi}' \circ \hat{\lambda} \circ \hat{\Psi}$
$\check{\mathfrak{m}}_{\tilde{\lambda}} : \check{\Phi}' \circ \check{\lambda} \circ \check{\Psi}$
$\bar{\mathfrak{m}}_{\tilde{\lambda}} : \overline{\Phi}' \circ \overline{\lambda} \circ \overline{\Psi}$
と定義する。
とくに
$\bar{\mathfrak{m}}_{\tilde{\lambda}} : \overline{C}_* \to \overline{C}'_*$ である。

系

$H(\overline{C}_*, \overline{d})$ は、$\mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$ と同型。
任意の $\mathcal{S}$-複体の射 $\lambda : \tilde{C}_* \to \tilde{C}'_*$ に対して、$\bar{\mathfrak{m}}_{\tilde{\lambda}} : \overline{C}_* \to \overline{C}'_*$ は同型を誘導する。
$H(\overline{C}_*, \bar{d}) \to H(\overline{C}'_*, \overline{d}')$ は、$1 + \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i x^i$ の掛け算
$b_i \in \mathbb{Z}$

h-不変量

$\mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$ を
$\mathfrak{i}_* : H(\hat{\mathfrak{C}}_*, \hat{d}) \to \mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$ の像
$(\mathfrak{p} : \mathbb{Z}[[x^{-1}, x] \to H(\check{\mathfrak{C}}_*, \check{d})$ の kernel)
とする。

定義

$$h\left(\widetilde{C}\right) := -\inf_{Q(x)\in\mathfrak{I}} \{Deg(Q(x))\}$$

morphism：$\widetilde{C} \to \widetilde{C}'$
とすれば、$\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}'$ の写像は $1 + \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i x^i$ の掛け算、

$$h\left(\widetilde{C}\right) \leq h\left(\widetilde{C}'\right)$$

命題

$h(\widetilde{C}) > 0$ であること
$\Leftrightarrow \exists \alpha \in C_* \ s.t. \ d(\alpha) = 0, \ \delta_1(\alpha) \neq 0.$
$h(\widetilde{C}) = k > 0$ であるなら
k は次の性質を満たす $\alpha \in C_*$ が存在する最大の整数

$$d\alpha = 0, \delta_1 v^{k-1}(\alpha) \neq 0, \ \ \delta_1 v^i(\alpha) = 0, \quad (i \leq k-2)$$

命題

$h(\tilde{C}) = k \leq 0$ なら、そのとき、k は次の性質を満たす $\alpha_0, \cdots \alpha_{-k} \in \mathbb{Z}, \alpha \in C_*$ が存在するような最大の整数。

$$d\alpha = \sum_{i=0}^{-k} v^i \delta_2(a_i), \quad a_{-k} \neq 0$$

Local equivalence

$\mathcal{S}$: Category

s, t：object with preoder (reflexive & transitive)

$s \xrightarrow{\exists} t \Leftrightarrow s \dot{\leq} t$

$s \sim t \Leftrightarrow s \dot{\leq} t \& t \dot{\leq} s$ とすることで、同値関係 $\mathcal{S}/\sim$ を定める。

Local equivalence

R：環

$$\Theta_R^{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}\text{-複体}\}/\sim$$

ここで、

$$(\tilde{C}, \tilde{d}, \chi) \sim (\tilde{C}', \tilde{d}', \chi')$$

$$\Leftrightarrow \exists f : \tilde{C}_* \to \tilde{C}'_*, f' : \tilde{C}'_* \to \tilde{C}_* \quad \text{(morphism)}$$

として定義する。

$\Theta_R^{\mathcal{S}}$：半順序アーベル群 (複体のテンソル積)

$$\Theta^{\mathcal{S}}_{R,\mathbb{Z}/2N} := \{\mathbb{Z}/2N\text{-graded } \mathcal{S}\text{-複体 over } R\}/\sim$$

とおく。

命題

R：整域
$h : \Theta^{\mathcal{S}}_R \to \mathbb{Z}$ は (半順序集合アーベル群の) 準同型
R が体なら同型

$$im(\mathfrak{i}_*) = \mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$$

$\mathfrak{g}(\tilde{C})$

定義

$$\mathfrak{g}(\tilde{C}) = \gcd\{m | m := Q(x) \in \mathfrak{I} \text{ の } \textit{leading factor}$$
$$\textit{with } \deg(Q(x)) = h(\tilde{C})\} \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$\mathfrak{g} : \Theta^{\mathcal{S}}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_{>0}$

$\tilde{C} \leq \tilde{C}'$：$\mathcal{S}$-複体 $\Rightarrow \mathfrak{g}(\tilde{C}') | \mathfrak{g}(\tilde{C})$
$\mathfrak{g}(\tilde{C} \otimes \tilde{C}') | \mathfrak{g}(\tilde{C})\mathfrak{g}(\tilde{C}')$
R：整域
$(\tilde{C}, \tilde{d}, \chi)$：$R$ 上の $\mathcal{S}$-複体
$im(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I} \subset R[[x^{-1}, x]$：$(R[x]\text{-module})$

nested ideal sequence

$\tilde{C}$: $\mathcal{S}$-複体

定義

$$J_i(\tilde{C}) = \{a_0 \in R | \exists a_0 x^{-i} + a_{-1} x^{-i-1} + \cdots \in \mathfrak{I}\}$$

と定義すると、イデアルの列

$$\cdots \subset J_{i+1} \subset J_i \subset J_{i-1} \subset \cdots \subset R$$

が得られる。このような列は *local equivalence class* **の不変量**

$$h(\tilde{C}) = \max\{i | J_i \neq 0\}$$

$$J_h \subset J_{h-1} \subset J_{h-2} \subset \cdots \subset R$$

$R = \mathbb{Z}$ **のとき、**
J_h **は** $\mathfrak{g}(\tilde{C})$ **によって生成される主イデアルである。**

§5 同変不変量

同変特異インスタントンホモロジー

- $\hat{I}_*(Y, K)$ I-from
- $\check{I}_*(Y, K)$ I-to
- $\bar{I}_*(Y, K)$ I-bar

$\mathbb{Z}[x]$**-加群**

$$\bar{I}_*(Y, K) \cong \mathbb{Z}[[x^{-1}, x]$$

exact triangle **をもつ。**

$\mathcal{H}$：$\mathbb{Z}HS^3$ の中の based knot を object とし、negative definite pair を morphism とするカテゴリー
$Mod^{\mathbb{Z}/4}_{\mathbb{Z}[x]}$：$\mathbb{Z}/4$-graded $\mathbb{Z}[x]$-加群の category への functor
$\check{I}_*, \hat{I}_*, \bar{I}_*$ は
functor

$$\check{I}_* : \mathcal{H} \to Mod^{\mathbb{Z}/4}_{\mathbb{Z}[x]}$$

$$\hat{I}_* : \mathcal{H} \to Mod^{\mathbb{Z}/4}_{\mathbb{Z}[x]}$$

$$\bar{I}_* : \mathcal{H} \to Mod^{\mathbb{Z}/4}_{\mathbb{Z}[x]}$$

を与えている。

$$\Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}} := \{(Y,K)\}/\sim$$

$$(Y,K) \sim (Y',K') \Leftrightarrow \exists \text{neg. def. pair with}$$

$$(Y,K) \to (Y',K'), (Y',K') \to (Y,K)$$

$\Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}[x]}$ は半順序関係をもつアーベル群。

定理

R：可換環

ファンクター $(Y, K) \to (\tilde{C}_*(Y, K, R), \tilde{d}, \chi)$ は順序を保つ準同型 $\Xi : \Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}} \to \Theta^{\mathcal{S}}_{R,\mathbb{Z}/4}$ を与える。

定義

フロイショフ不変量 $h_{\mathbb{Z}}(Y, K)$ は、

$$h : \Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\Xi} \Theta^{\mathcal{S}}_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4} \xrightarrow{h} \mathbb{Z}$$

として与えられる。

自然な順序を保つ準同型

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}} \to \Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}}$$

定理

R：整域
に対して、順序を保つ群準同型

$$h_R : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$$

が誘導される。
つまり $(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$ が *neg. def pair* とすると、$h_R(Y, K) \le h_R(Y', K')$ を満たす。

§7 局所系係数・フィルトレーション

$$\mathscr{R} = \mathbb{Z}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}]$$

上の局所系を考える。
$[B] \in \mathscr{B}(Y, K)$ **に対して、**$\mathbb{R}$**-加群**

$$\Delta_{[B]} = \mathbb{Z}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}] U^{-CS(B)} T^{hol_K(B)}$$

を割り当てる。
$\gamma : [-1, 1] \to \mathscr{B}(Y, K)$ **を** α_1 **から** α_2 **への道。**
A **:** $\mathbb{R} \times Y$ **上の接続で、**γ **を表す。**
$t < -1$ **のとき、**α_1 **であり、**$t > 1$ **のとき** α_2 **となる。**

$$\Delta_\gamma : \Delta_{\alpha_1} \to \Delta_{\alpha_2}$$

を $f \mapsto f \times U^{2\kappa(A)} T^{\nu(A)}$ **とする。**
$U^{\pm 1}$ **:** grading **が** ± 4 **だけずれる。**
$T^{\pm 1}$ **:** grading **はズレない。**

$$\{\text{Monomials of } \Delta_\alpha\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{homotopy classes of } \alpha \rightsquigarrow \theta\}$$

$$C_*(Y, K, \Delta) = \oplus_{\alpha \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}} \Delta_\alpha$$

$$d(\alpha_1) = \sum_{\alpha_2 \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}, [A] \in \check{M}(\alpha_1, \alpha_2)_0} \Delta(A) \cdot \alpha_2$$

ここで $\Delta(A) = \Delta_\gamma$ **：** γ **は** A **によって誘導される** $\mathscr{B}(Y, K)$ **の道。**

negative definite pair **に対して、**

$$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$$

の場合、

$$\lambda_{(W,S,\Delta)}(\alpha) = \sum_{\alpha' \in \mathfrak{C}_\pi^{irr}, [A] \in M(W,S,\alpha,\alpha')_0} \Delta(A)\alpha'$$

と定義する。

$\mathscr{S}$: $\mathbb{Z}$-graded $\mathscr{R}$-代数
次の局所系係数のホモロジーが定義できる。

$$(\tilde{C}(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}}), \tilde{d}), \ \Delta_{\mathscr{S}} = \Delta \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{S}$$

として局所系ホモロジーができる。

例

$\mathscr{T} = \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ **のとき、**$(U = 1$ **としたもの**$)$ $(\tilde{C}(Y, K, \Delta_{\mathscr{T}}), \tilde{d})$ **が** KM **の局所系係数の** $\mathcal{S}$**-複体。**

同様に、

$$\hat{I}(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}}), \check{I}(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}}), \bar{I}(Y, K, \Delta_{\mathscr{S}})$$

が $\mathbb{Z}$-graded **な** $\mathscr{S}[x]$**-加群として定義できる。**

$\mathscr{R}$-代数 $\mathscr{S}$ に対して同様にフロイショフ不変量

$$h_{\mathscr{S}}(Y, K) \in \mathbb{Z}$$

が定義される。
次のイデアル列

$$J_h^{\mathscr{S}}(Y, K) \subset J_{h-1}^{\mathscr{S}}(Y, K) \subset \cdots \mathscr{S}$$

が定義できる。

CS-filtration

定義

$R[U^{\pm 1}]$ 上のレベル δ の I-graded $\mathcal{S}$-複体 (with $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$-bigraded as an R-module)$(\tilde{C}, \tilde{d}, \chi)$ に対して
次を満たすものをいう。

1. $U\tilde{C}_{i,j} \subset \tilde{C}_{i+4,j+1}$
2. $\tilde{d}\tilde{C}_{i,j} \subset \cup_{k<j+\delta} \tilde{C}_{i-1,k}$
3. $\chi \tilde{C}_{i,j} \subset \tilde{C}_{i+1,j}$

$\mathbb{Z}$ の方は $\tilde{gr}$ とし、$\mathbb{R}$ の方は deg_I という。
$1 \in R[U^{\pm 1}] \subset \tilde{C}$ は $(0,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ である。

$\delta' > \delta$ に対して

$$\tilde{C} = (\oplus_{k=1}^{n} R[U^{\pm 1}]\gamma_k) \oplus (\oplus_{k=1}^{n} R[U^{\pm 1}]\underline{\gamma_k}) \oplus R[U^{\pm 1}]\gamma_0$$

$$= C_* \oplus C_{*-1} \oplus R[U^{\pm 1}]$$

$\mathcal{S}$-複体分解 γ_k は (i_k, j_j)-grading とすると、$\underline{\gamma_k}$ は $(i_k + 1, j_j)$-grading を持つ。

$$\deg_I(\sum s_k \zeta_k) = \max\{\deg_I(\zeta_k) | s_k \neq 0\}$$

と定義する。

γ_k は既約な critical point から θ への道
γ_0 は θ の定値パス

定義

$\tilde{\lambda} : \tilde{C} \to \tilde{C}'$ がレベル $\delta > 0$ の *I-graded* $\mathcal{S}$-複体の *morphism* は $R[U^{\pm 1}]$-加群の準同型であり、$\mathcal{S}$-複体の *morphism* で

$$\tilde{\lambda}\tilde{C}_{i,j} \subset \cup_{k \le j+\delta} \tilde{C}'_{i,k}$$

を満たす。
$\tilde{K}$ が *morphism* $\tilde{\lambda}$ と $\tilde{\lambda}'$ のレベル δ の $\mathcal{S}$-チェインホモトピーであるとは、$R[U^{\pm 1}]$-加群の準同型であり、$\tilde{\lambda}$ と $\tilde{\lambda}$ の間の $\mathcal{S}$-チェインホモトピーであり、

$$\tilde{K}\tilde{C}_{i,j} \subset \cup_{k \le j+\delta} \tilde{C}'_{i+1,k}$$

enriched $\mathcal{S}$-複体

定義

$\tilde{\mathfrak{C}}$ が *enriched* $\mathcal{S}$-複体であるとは次の $R[U^{\pm 1}]$ 上の I-*graded* $\mathcal{S}$-複体の列 $\{(\tilde{C}^i, \tilde{d}^i, \chi^i)\}_{i\geq 1}$ とレベル $\delta_{i,j}$ の *morphism* $\phi_i^j : \tilde{C}^i \to \tilde{C}^j$ で次を満たすもの。

1. $\phi_i^i = id$, $\phi_k^j \circ \phi_i^k$ はレベル $\delta_{i,k,j}$ の $\mathcal{S}$-チェインホモトピーを通して ϕ_i^j に $\mathcal{S}$-複体のチェインホモトピー同値
2. $\forall \delta > 0$ に対して、ある $N > 0$ が存在して、$i > N$ に対して、$\delta_i \leq \delta$ かつ $i, j > N$ は $\delta_{i,j} \leq \delta$ が成り立つ。
   また、$\forall i, k, j > N$ に対して $\delta_{i,k,j} < \delta$ が成り立つ

(Y, K)：based knot に対して、CS-func の perturbation の列に associated された I-graded $\mathcal{S}$-複体の列として

$$\tilde{\mathfrak{C}}(Y, K, \Delta) := \{(\tilde{C}^i_*(Y, K, \Delta), \tilde{d}^i, \chi^i)\}$$

と定義する。
ここで、$(\tilde{C}^i_*(Y, K, \Delta), \tilde{d}^i, \chi^i)$ その perturbation によって決定されるレベル δ_i である。
$\tilde{\mathfrak{C}}(Y, K, \Delta)$ は $R[U^{\pm 1}]$ 上の enriched $\mathcal{S}$-複体となる。
$R = \mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$。

$r = 1, 2$ に対して $\tilde{\mathfrak{C}}(r) = (\{(\tilde{C}^i_*(r), \tilde{d}^i(r), \chi^i(r))\}, \phi^j_i(r))$ を enriched $\mathcal{S}$-複体とする。

定義

$\tilde{\mathfrak{C}}(1) \to \tilde{\mathfrak{C}}(2)$ が *enriched* 複体の *morphism* であるとは、レベル $\delta_{i,j}$ の I*-graded* $\mathcal{S}$*-*複体の *morphism*

$$\tilde{\lambda}^j_i : \tilde{C}^i(1) \to C^j(2)$$

の集まりで次を満たすもの

1. $\tilde{\lambda}^j_k \circ \phi^k_i(1)$ と $\phi^j_k(2) \circ \tilde{\lambda}^k_i$ はレベル $\delta_{i,j}$ の $\mathcal{S}$-チェインホモトピー同値を通して $\tilde{\lambda}^j_i$ と $\mathcal{S}$-チェインホモトピー同値。
2. $\forall\delta > 0$ に対して、ある $N > 0$ が存在して、$i, j > N$ は $\delta_{i,j} \leq \delta$ が成り立つ、または、$\forall i, k, j > N$ に対して $\delta_{i,k,j} < \delta$ が成り立つ

コンコーダンス不変量 $\Gamma^R_{(Y,K)}$

R：整域かつ $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$

$$\Gamma^R_{(Y,K)} : \Theta^{\mathfrak{C}}_{R[U^{\pm 1}]} \to Map(\mathbb{Z}, \overline{R}_{\geq 0})$$

を定義する。
Daemi の不変量 Γ の一般化
ただし、$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$
$\tilde{\mathfrak{C}}$：enriched $\mathcal{S}$-complex defined

$$\{(\tilde{C}^j, \tilde{d}', \chi^j)\}$$

C^j：I-graded associated chain group と $R[U^{\pm 1}]$-加群の準同型

$$d^j : C^j \to C^j, \quad v^j : C^j \to C^j$$

$$\delta^j_1 : C^j \to R[U^{\pm 1}], \quad \delta^j_2 : R[U^{\pm 1}] \to C^j$$

$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ にたいして、

$$\Gamma(\tilde{\mathfrak{C}})(k) = \lim_{j \to \infty} \inf_{\alpha}(\deg_I(\alpha)) \in \overline{\mathbb{R}}_{>0}$$

と定義する。ここで、inf は $\alpha \in C^j$ かつ $(2k-1, \deg_I(\alpha))$ の bigrading をもち、

$$d^j(\alpha) = 0, k-1 = \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \delta_1^j (v^j)^i(\alpha) \neq 0\}$$

を満たす中でとる。
$k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ にたいして、

$$\Gamma(\tilde{\mathfrak{C}})(k) = \max(\lim_{j \to \infty} \inf_{\alpha}(\deg_I(\alpha)), 0) \in \overline{\mathbb{R}}_{>0}$$

と定義する。ここで、$\alpha \in C^j$ かつ $(2k-1, \deg_I(\alpha))$ の bigrading をもち、$\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{-k}\} \subset R[U^{\pm 1}]$ が存在して

$$d^j(\alpha) = \sum_{i=0}^{-k} (v^j)^i \delta_2^j(a_i)$$

$\tilde{\mathfrak{C}} \to \tilde{\mathfrak{C}}'$：enriched $\mathcal{S}$-**複体の** morphism **なら、**

$$\Gamma(\tilde{\mathfrak{C}})(k) \geq \Gamma(\tilde{\mathfrak{C}}')(k)$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ **に対して成り立つ。**

Γ **は、**enriched $\mathcal{S}$-**複体の** local equivalence **に関して不変である。**

定義

(Y, K)：*based knot* K *in* Y

R：$\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ **上の代数** *(***整域***)*

$$\Gamma^R_{(Y,K)} = \Gamma\left(\tilde{\mathfrak{C}}(Y, K, \Delta_{R[U^{\pm 1}]})\right)$$

と定義する。

このとき、

$$\Gamma^R_{(Y,K)} : \Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\Omega} \Theta^{\mathfrak{C}}_{R[U^{\pm 1}]} \xrightarrow{\Gamma} Map_{\geq 0}(\mathbb{Z}, \overline{R}_{\geq 0})$$

が得られる。

定理

(Y, K)：*based knot in* Y

1. $\Gamma^R_{(Y,K)}$ は $\Theta^{3,1}_{\mathbb{Z}}$ の不変量
2. $\Gamma^R_{(Y,K)}$ は $\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 上の非増加関数。$\forall i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して *positive*
3. $(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$*negative definite cobor*：

$$\Gamma^R_{(Y',K')}(i) \leq \begin{cases} \Gamma^R_{(Y,K)}(i) - \eta(W, S) & i > 0 \\ \max(\Gamma^R_{(Y,K)}(i) - \eta(W, S), 0) & i \leq 0 \end{cases}$$

不変量 $\eta(W, S) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は $\pi_1(W \setminus S)$ の *traceless* $SU(2)$ 表現で (Y, K),(Y', K') の既約 $SU(2)$ 表現を拡張したものが存在しないなら $\eta(W, S) > 0$

定理のつづき

4. $\forall i \in \mathbb{Z}$ **に対して、** $\Gamma^R_{(Y,K)}(i) < \infty \Leftrightarrow i \leq h_R(Y,K)$
5. $\forall i \in \mathbb{Z}$ **に対して、** $\Gamma^R_{(Y,K)}(i) \notin \{0, \infty\}$ **ならば、**

$$\Gamma^R_{(Y,K)}(i) \equiv CS(\alpha) \bmod \mathbb{Z}$$

証明は due to Daemi

§8 KM のホモロジーとの関係

$I^\omega(Y, L)$：KM のフレアホモロジー
$I^\#(Y, L)$, $I^\natural(Y, L)$

定義

admissible link (Y, L, ω)
L：*unoriented link in* Y
$\omega \subset Y$；*arc connecting two points in* L *s.t.*
$\Sigma \subset Y$：閉曲面
次のどちらかが成り立つ。

1. Σ は L と *disjoint union* で ω と奇数回で交わる
2. Σ は L と *transverse* と奇数回交わる。

(non-integral condition)

$$C^{\omega}(Y,L) = \oplus_{\alpha\in\mathfrak{C}_\pi}\mathbb{Z}\cdot\alpha$$

$\widetilde{C}(Y,K) \simeq C^{\natural}(Y,K)$ はチェインホモトピー同値。

$$I^{\natural}(Y,K) = I^{\omega}(Y, L\# H)$$

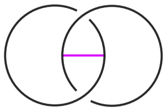


Figure 13: The Hopf link H with the arc ω.

特に、$I_*^{\natural}(Y,l)$：KM の $\mathbb{Z}/4$-grading ホモロジー

$$I^{\#}(Y, L) = I^{\omega}(Y, L \sqcup H)$$

$$v : C^{\omega}_{*} \to C^{\omega}_{*-2}$$

holonomy を使ったアナロジー。v は d と可換

$$(\tilde{C}(Y, L), \tilde{d})$$

を

$$\tilde{C}(Y, L) = C^{\omega}_{*} \oplus C^{\omega}_{*-2}$$

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ v & -d \end{bmatrix}$$

定理

$$\tilde{C}^{\omega'}(Y\#Y', K\#L') \cong \tilde{C}(Y,K)\otimes\tilde{C}^{\omega'}(Y',L')$$
$$\tilde{C}^{\omega\cup\omega'}(Y\#Y', K\#L') \cong \tilde{C}^{\omega}(Y,K)\otimes\tilde{C}^{\omega'}(Y',L')$$

定理

$$\widetilde{I}(Y,K) \simeq I^{\natural}(Y,K)$$

が成り立つ。この同型は、$\sigma(K)$ の *degree* をもつ。

proof

$C^\natural(Y,K) = C^\omega(S^3 \# Y, H \# K)$
$\simeq \tilde{C}^\omega(S^3,H) \otimes \tilde{C}(Y,K)$
ここで $\tilde{C}^\omega(S^3,H)$ は one generator であり、zero differential
v-map も zero
よって、$\tilde{C}^\omega(S^3,H) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$(trivial diff)
$\tilde{C}^\omega(S^3,H) \otimes \tilde{C}(Y,K)$
は、$\tilde{C}(Y,K)$ のゼロ map に関する mapping cone
$\tilde{C}^\omega(S^3,H) \otimes \tilde{C}(Y,K) \simeq \tilde{C}(Y,K)$

$$\tilde{C}_*(Y,K) = C_*(Y,K) \oplus C_{*-1}(Y,K) \oplus \mathbb{Z}$$

$\chi : \tilde{C}_*(Y,K) \to \tilde{C}_*(Y,K)$

ここで

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理

$$C^{\#}(Y,K) \simeq Cone(2\chi)$$

R：環
$(\tilde{C}_*, \tilde{d}, \chi)$：$\mathcal{S}$-複体

$$\hat{C}_* = \tilde{C}_* \times_R R[x], \quad \hat{d} = -\tilde{d} + x \cdot \chi$$

$\varphi : R[x] \to S$：環準同型（S:環）

$$\hat{C}^{\varphi}_* = S \otimes_R \tilde{C}_*, \quad \hat{d}^{\varphi}(s \cdot \zeta) = -s \cdot \tilde{d}\zeta + \varphi(x) s \cdot \chi(\zeta)$$

ex) $\varphi : R[x] \to R$ $\phi : x \mapsto 0$ とすると、$\hat{C}^{\phi}_* = \tilde{C}_*$

命題

$\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ を $\phi(x) = 2x$ とすると、

$$C^{\#}_*(Y, K) \cong \hat{C}^{\phi}_*(Y, K)$$

他にもいくつか $\hat{I}$ と $I^{\#}$ などの同型を作っている。

コンコーダンス不変量

$$s^{\#}(K), z^{\natural}_{BN}(K), z^{\#}(K)$$

と我々の関係はどうなるのか？

問題

$s^{\#}(K), z^{\natural}_{BN}(K), z^{\#}(K)$ **は我々の不変量** $\mathcal{S}$ **複体** $\tilde{C}(Y, K, \Delta_{\mathcal{T}})$ **の** *local equivalence class* **で決定できるか？**

関係はわからないが、そのレシピを与えている。

§9 計算例

$\mathfrak{C}(K) = \mathfrak{C}(S^3, K)$（singular CS **汎関数の** critical set）

$$\mathscr{X}(Y) = \{\rho : \pi_1(Y) \to SU(2)\}/SU(2)$$

$\mathscr{X}(Y)$ **は** $\mathfrak{C}$ **と同一視される。**

$\tau : \Sigma \to \Sigma$ (involution)

$P \to \Sigma$ $SU(2)$-**束**

$\mathfrak{g}_E$ adjoint bundle

$\tilde{\tau} : \mathfrak{g}_E \to \mathfrak{g}_E$ **:** lift of τ

$\check{\mathfrak{g}}_K = \mathfrak{g}_\Sigma/\tilde{\tau}$ **:** $SO(3)$-orbifold bundle over (S^3, K)

$\mathfrak{C}^\tau(\Sigma) \subset \mathfrak{C}(\Sigma)$ **:** $\tilde{\tau}$ **によって固定される部分集合**

$$\prod : \mathfrak{C}(K) \to \mathfrak{C}(\Sigma)^\tau \quad \text{(surjection)}$$

は、次の分解をもつ

$$\prod : \mathfrak{C}(K) \to \mathfrak{C}(K)/\iota \xrightarrow{\text{bij}} \mathfrak{C}(\Sigma)^\tau$$

$\prod^{-1}(\theta_\Sigma) = \theta$

ι：**フリップ対称性**

Σ 上に既約な接続で引き戻される flat 接続には自由に作用：可約な flat 接続では自明に作用

<u>モジュライ空間上の ι 作用</u>

$\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma \in \mathfrak{C}(\Sigma)^\tau$

として、$\prod(\alpha) = \alpha_\Sigma, \prod(\beta) = \beta_\Sigma$ とする。このとき、$\mathbb{R}$-不変な対称性

$$\iota : M(\alpha, \beta) \to M(\iota\alpha, \iota\beta)$$

が存在する。α, β がどちらかが可約の場合、

$$(\check{M}(\alpha,\beta) \cup \iota(\check{M}(\alpha,\beta)))/\iota = \check{M}(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma)^\tau$$

α, β のどちらも既約な場合、

$$(\check{M}(\alpha,\beta) \cup \iota(\check{M}(\alpha,\beta)) \cup \check{M}(\iota\alpha,\beta) \cup \check{M}(\alpha,\iota\beta))/\iota = \check{M}(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma)^\tau$$

2-bridge knot の場合

(p, q) : 互いに素な整数
p : 奇数
$K_{p,q}$ の double cover が $L(p, q)$ となる。

$$\mathfrak{C}(L(p,q)) = \{\xi^i_{L(p,q)} | i = 1, 2, \cdots, (p-1)/2\}$$

$\xi^i_{L(p,q)}$: flat $SU(2)$-接続

$$\pi_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}/p \to SU(2)$$

$$\xi^i_{L(p,q)} : [\text{generator}] \mapsto \begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}$$

ζ:1 の原始 p 乗根

$$S^3 \to L(p,q) \to (S^3.K_{p,k})$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^q z_2), (z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

(Dihedral group D_{2p} quotient)

$\xi^i_{L(p,q)}$ **は可約 flat であるから、唯一のリフト** ξ^i **が存在する。**

$$\xi^i \to \xi^i_{L(p,q)}$$

ξ^i **は既約な接続**

$$\mathfrak{C} = \{\theta\} \cup \{\xi^i | 1 \leq i \leq (p-1)/2\}$$

$\theta = \xi^0$ **：可約 flat 接続**

$$C(K_{p,q}) = \oplus_{i=1}^{(p-1)/2} \mathbb{Z} \cdot \xi^i$$
$$\tilde{C}(K_{p,q}) = C(K_{p,q}) \oplus C_{*-1}(K_{p,q}) \oplus \mathbb{Z}$$

$\tilde{d} = 0$ and $d, v, \delta_1, \delta_2 = 0$

命題

$K_{p,q}$ を任意の *2-bridge* 結び目とする。このとき、$h(K_{p,q}) = 0$ である。

$\mathfrak{C}(L(p,q))$ の任意の元は τ で固定される。(Poudel, Saveliev)

$$\mathfrak{C}(L(p,q))^{\tau} = \mathfrak{C}(L(p,q))$$

$\mathbb{R} \times L(p,q)$ のモジュライ空間

Austin, "Equivariant Floer groups for binary plyhedral spaces"
Furuta, "Z_a-invariant $SU(2)$ instantons over the four sphere"
Furuta, Hashimoto, "Invariant instantons on S^4"

$$a + qb \equiv 0 \mod p \tag{2}$$

$$N_1(k_1, k_2; p, q) = \#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ with } (2) \mid |a| < k_1, |b| < k_2\}$$

$$N_2(k_1, k_2; p, q) = \#\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ with } (2) \,\middle|\, \begin{array}{c} |a| < k_1, |b| = k_2 \text{ or} \\ |a| = k_1, |b| < k_2 \end{array}\right\}$$

命題

$0 \leq i, j \leq (p-1)/2$, $i \neq j$ とする。
$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, -1\}$ が存在して、

$$\begin{cases} k_1 \equiv \epsilon_1 i + \epsilon_2 j \bmod p, \quad qk_2 \equiv -\epsilon_1 i + \epsilon_j \bmod p \\ N_1(k_1, k_2, p, q) = 1, \; N_2(k_1, k_2, p, q) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

を満たすとき、
$\check{M}(\xi^i_{L(p,q)}, \xi^j_{L(p,q)})_0 = \{pt\}$
そうでなければ、
$\check{M}(\xi^i_{L(p,q)}, \xi^j_{L(p,q)}) = \emptyset$

Daemi-Scaduto's papers

§1 導入
§2 特異 $SU(2)$ ゲージ理論の復習
§3 フレアホモロジー
§4 特異インスタントン同変不変量
§5 同変不変量
§7 局所系係数・フィルトレーション
§8 KM のホモロジーとの関係
§9 計算例
Daemi Scaduto

$[A']$：$\mathbb{R} \times L(p,q)$ 上のインスタントンが存在するとき、

$$\kappa(A') = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}\times L(p,q)} tr(F_{A'} \wedge F_{A'}) = \frac{1}{p} \cdot c_2(\tilde{E}) = \frac{k_1 k_2}{p}$$

ここで、$\tilde{E} \to S^4$ は $\mathbb{R} \times S^3$ の拡張

pullback は、埋め込み

$$(\check{M}(\xi^i_{L(p,q)}, \xi^j_{L(p,q)})_{\frac{d}{2}})/\iota \hookrightarrow \check{M}(\xi^i_{L(p,q)}, \xi^j_{L(p,q)})_d$$

を誘導する。

$\mathbb{R} \times (S^3, K_{p,q})$ 上のモジュライ空間

系

$0 \leq i, j \leq (p-1)/2,\ i \neq j$ とする。
$\check{M}(\xi^i, \xi^j)_0 = \emptyset \Leftrightarrow \check{M}(\xi^i_{L(p,q)}, \xi^j_{L(p,q)})_0 = \emptyset$
$\check{M}(\xi^i, \xi^j)_0 \neq \emptyset$ であるとすると、それは 2 点であり、向きは逆

$\because\ d, \delta_1, \delta_2$ は消える。
局所系係数を持つ d, δ_1, δ_2 の計算するために以下を与えておく。

命題

$\check{M}(\xi^i, \xi^j)_0 \neq \emptyset$ と仮定する。それは、$\{[A], \iota([A])\}$ であり、

$$\{\nu([A]), \nu(\iota[A])\} = \begin{cases} \{0\} & k \equiv 0 \bmod 2 \\ \{2, -2\} & k \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$(C_*(K_{p,q}, \Delta \otimes \mathbb{F}), d)$

$\mathscr{R} \otimes \mathbb{F} = \mathbb{F}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}]$

$$C_*(K_{p,q}, \Delta \otimes \mathbb{F}) = \oplus_{i=1}^{(p-1)/2} U^{c_i} \cdot \mathbb{F}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}] \cdot \xi^i$$

$1 \le i \le (p-1)/2, j = 1$, (3) **の解が存在するとする。** c_i **は** ξ^i **に** associated **された** CS-invariant

$$c_i = -2k_1 k_2 / 2p = -k_1 k_2 / p$$

より

$$gr(\xi^i) \equiv N_1(k_1, k_2, p, q) + \frac{1}{2} N_2(k_1, k_2, p, q) \bmod 4$$

$0 \le i, j \le (p-1)/2, \quad i \neq j$ に対して、$a_{ij} \in \mathbb{F}[U, T^{\pm 1}]$ を

$$a_{ij} := \begin{cases} U^{-k_1 k_2/p}(T^2 - T^{-2}) & \exists k_1, k_2 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1, (3) \text{ を満たす} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とすると、

$$\langle d\xi^i, \xi^j \rangle = a_{ij}, \ \delta_1(\xi^i) = a_{i0}, \ \langle \delta_2(1), \xi^i \rangle = a_{0i}$$

実際どのような値になるかよくわからない

笹平の不変量との関係

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2$

$$C_*(L(p,q),\mathbb{F}) = \oplus_{i=1}^{(p-1)/2}\mathbb{F}\cdot\xi^i_{L(p,-q)}$$

$\mathbb{F}_4 := \mathbb{F}[x]/(x^2+x+1)$：4 元体
$f : \mathbb{R}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}] \to \mathbb{F}_4$ を
$f(U) = 1, f(T) = x$ と定義すると $f(T^2 - T^{-2}) = 1$ であるから、$\mathbb{F}_4$ は $\mathscr{R}$ 代数

定理

$(C_*(K_{p,q}), \Delta_{\mathbb{F}_4}), d)$ は $C_*(L(p,-q)\otimes\mathbb{F}_4, d)$ と同型である。
よって、

$$I_*(K_{p,q},\Delta_{\mathbb{F}_4}) \cong I_*(L(p,-q))\otimes\mathbb{F}_4$$

笹平不変量から $I_*(L(8k+1,2)) = 0$ より、
$h_{\mathscr{S}}(K_{8k+1,-2}) = 0$
$\mathscr{S}$：任意の $\mathscr{R}$-代数

trefoil 結び目の場合

$\mathscr{R} = \mathbb{Z}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}]$ とする。
$3_1 = K_{3,-1}$(2-bridge 結び目) よって、$c_1 = -k_1 k_2/p = -1/3$, より、

$$C_*(K_{3,-1}, \Delta) = U^{c_1}\mathscr{R}\xi^1$$

$$\delta_1(\xi^1) = \pm U^{1/3}(T^2 - T^{-2})$$

$$\delta_2 = 0$$

$$\tilde{C}_* = \tilde{C}_*(K_{3,-1}, \Delta)$$

$$\tilde{C}_* = (U^{-1/3}\mathscr{R}\xi^1) \oplus (U^{-1/3}\mathscr{R}\chi\xi^1) \oplus \mathscr{R}\cdot\theta$$

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm U^{1/3}(T^2 - T^{-2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{I} = (T^2 - T^{-2})x^{-1} + \mathscr{R}[x] \subset \mathscr{R}[[x^{-1}, x]$$

$$J_1^{\mathscr{R}} = (T^2 - T^{-2}), J_i^{\mathscr{R}} = 0 \ (i \geq 2), J_i^{\mathscr{R}} = \mathscr{R} \ (i \leq 0)$$

定理

right handed trefoil **のとき、** $h_{\mathscr{S}} = 1$

$$\Gamma^R_{K_{3,-1}}(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ 1/3 & k = 1 \\ \infty & k \geq 2 \end{cases}$$

他にもいろいろ計算できる。

$T(3,5)$ の場合

$K = T(3,5)$ とする。
$\Sigma(2,3,5) \to (S^3, K)$: double branched cover
$\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma \in \mathfrak{C}(\Sigma)$: $gr(\alpha_\Sigma) = 1, gr(\beta_\Sigma) = 5$

$$C_*(\Sigma) = \mathbb{Z}_{(1)} \oplus \mathbb{Z}_{(5)} = I_*(\Sigma)$$

θ_Σ : trivial connection
$\mathfrak{C}(\Sigma)^\tau = \mathfrak{C}(\Sigma)$(Saveliev)

$$\alpha, \iota\alpha, \beta, \iota\beta$$

$$\tilde{C}_*(K) = (\mathbb{Z}^2_{(1)} \oplus \mathbb{Z}^2_{(5)}) \oplus (\mathbb{Z}^2_{(0)} \oplus \mathbb{Z}_{(4)})^2 \oplus \mathbb{Z}_{(0)}$$

$$S^3 \to \Sigma(2,3,5) \to (S^3, T_{3,5})$$

いろいろ (同変 ADHM、Austin **の結果、**$\check{M}(\alpha_\Sigma, \theta_\Sigma) = \{[A']\}$)
使うと $\delta_1 : \mathbb{Z}^2_{(1)} \to \mathbb{Z}$ **は** non-zero

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

命題

$h(T_{3,5}) = 1$

トーラス結び目

Fintushel-Stern の仕事

$\Sigma = \Sigma(p, q, r)$：ブリースコーンホモロジー球面 (p, q, r がどの 2 つにも互いに素)
$I_*(\Sigma(p, q, r))$
$\mathfrak{C}(\Sigma)$：(unperturbation で)non-degenerate、odd-grading($\rightsquigarrow d = 0$)
$C_*(\Sigma) = I_*(\Sigma)$

p, q:odd
$\Sigma(p, q, 2) \to (S^3, T(p, q))$：double branched cover

$$I(T_{p,q}) = \mathbb{Z}^{-\sigma(T_{p,q})/2}$$

$\mathfrak{C}(K)^\tau = \mathfrak{C}(K)$ (Saveliev)
よって、$I_*(K) = C_*(K))$

$h(K)$ が消える条件

$\Delta_K(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i$ のときに、

$$|\Delta_K(t)| = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i|$$

とする。

定理 (singular instanton=sutured instanton Floer)

$$I^\natural(K,\mathbb{Q}) \cong KHI(K,\mathbb{Q})$$

$\chi(KHI(K,\mathbb{Q})) = \Delta_K(t)$
$\mathrm{rank}(I^\natural(K)) \geq |\Delta_K(t)|$
$H_*(\tilde{C}_*) = I^\natural(K)$ であるから $\frac{1}{2}(|\Delta_K| - 1)$ のとき、$\tilde{C}_*$ の全ての differential が zero
特に、$\delta_1 = \delta_2 = 0$ となる。よって、$h(K) = 0$ となる。

つまり、

$$\mathscr{X}(K) = |\mathfrak{C}_\pi(K)| = \frac{1}{2}(|\Delta_K| + 1|)$$

命題

$K = T(p,q)$ **:** (p,q)-**トーラス結び目** $((p,q)=1)$
もし、$1 + |\sigma(K)| = |\Delta_K|$ **なら、**$h(K) = 0$ **となる。**

例えば、

$(p, 2pk+2),\ k \geq 1, p \equiv 1 \bmod 2$
$(p, 2pk \pm (2-p)),\ k \geq 1, p \equiv \pm 1 \bmod 4$
などの族はこの条件を満たす。

$K \subset S^3$：**結び目**

定義 (4 次元 clasp 数)

$c_s(K)$：*4-dimensional clasp number*
$D \subset B^4$：*normally immersed disk* **の交点数の最小数**
$\Leftrightarrow$*transverse double point* **のみの** *immersed disk*

$c_s^+(K)$positive double point **の最小数**
$c_s^-(K)$negative double point **の最小数**

$$c_s(K) \geq c_s^+(K) + c_s^-(K)$$

$c_s(K) \geq g_s(K)$
$g_s(K)$：4-ball genus (**埋め込まれた曲面の最小種数**)

問題

$c_s(K) - g_s(K)$ **はいくらでも大きくなるか？**

定理

$K_1 = 7_4$
$K_n = \# nK_1$

$$c_s^+(K_n) - g_s(K_n) \geq n/5$$

Daemi-Scaduto **の**

$$\Gamma_K : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

を用いて示される。
c.f. **村杉の不等式：** $g_s(K) \geq |\frac{1}{2}\sigma(K)|$
$g_s(K_n) = n$, $\sigma(K_n)/2 = -n$

定理

$K \subset S^3$ に対して、もし、$-\sigma(K)/2 \geq 0$ なら

$$\Gamma_K\left(-\frac{1}{2}\sigma(K)\right) \leq \frac{1}{2}c_s^+(K)$$

定理

$\mathcal{T} = \mathbb{Z}[U^{\pm 1}, T^{\pm 1}]$ とする。
$K \subset S^3$：結び目に対して、

$$h_{\mathcal{T}}(K) = -\frac{1}{2}\sigma(K)$$

である。$K \subset Y$ が *null-homotopic knot* とするとき、

$$h_{\mathcal{T}}(Y, K) = -\frac{1}{2}\sigma(Y, K) + 4h(Y)$$

$\mathcal{T}$ が $T^4 = 1$ を満たす代数のとき、

1. K が alternating, or quasi-alternating なら $h_{\mathcal{T}}(K) = 0$
2. 漸化式

$$h_{\mathcal{T}}(T_{p,p+q}) - \sigma(T_{p,q}) = h_{\mathcal{T}}(T_{p,q}) + \frac{1}{2}\sigma(T_{p,q}) - \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$$

が成り立つ。

系

$\mathcal{T}$ を $T^4 \neq 1$ を満たす代数
$K^{\subset}S^3$ かつ $\sigma(K) \leq 0$ を満たすとする。そのとき、

$$rk(i_1(K, \Delta_{\mathcal{T}})) \geq \lceil -\frac{\sigma(K)}{4} \rceil, \quad rk(I_3(K, \Delta_{\mathcal{T}})) \geq \lfloor -\frac{\sigma(K)}{4} \rfloor$$

定理

$T_{p,q}$：(p, q)-トーラス結び目このとき、

$$I_*(Y, K) = \mathbb{Z}_{(1)}^{\lceil -\sigma(T_{p,q})/4 \rceil} \oplus \mathbb{Z}_{(3)}^{\lfloor -\sigma(T_{p,q}) \rfloor}$$

$D_{m,n}$：double twist knot
$g_s(D_{m,n}) = 1 = -\sigma(D_{m,n})/2$

定理

$k \geq 0$ **に対して**

$$c_s^+(kD_{m,n}) - g_s(kD_{m,n}) \geq \frac{k(4mn-4m-4n+3)}{4mn-1}$$

もし、 $m, n \geq 2$ **なら**

$$c_s^+(kD_{m,n} - g_s(kD_{m,n}) \geq Ck$$

$K \subset S^3$：結び目
K が自明でなければ、non-trivial representation

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \to SU(2)$$

が存在する。

問題

$F \subset S^4$：結び目
このとき、F が自明でなければ、non-trivial representation

$$\pi_1(S^4 \setminus F) \to SU(2)$$

をもつか？

定理

$\sigma(K) \neq 0$ となる結び目
$S \subset [0,1] \times S^3$：$K$ から K への *smooth concordance*
このとき、

$$\pi_1([0,1] \times S^3 \setminus S) \to SU(2)$$

は *non-abelian representation* をもつ

$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$：ホモロジーコンコーダンス類の集合
$\mathcal{C}$：コンコーダンス類の集合

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$$

$$\Theta^3_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$$

$$Y \mapsto (Y, unknot)$$

$\mathcal{T}$：$\mathbb{Z}[U^{\pm}, T^{\pm}]$ 上の整域
$h_{\mathcal{T}} : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$

定理

$(W, S) : (Y, K) \to (Y', K')$
ホモロジーコンコーダンス
$K \subset Y$ が *null-homotopic* とし、$-\frac{1}{2}\sigma(Y, K) + 4h(Y) \neq 0$ とする。
$\pi_1(Y \setminus K)$ と $\pi_1(Y' \setminus K')$ の *non-abelilan traceless* 表現を拡張する *traceless* 表現

$$\pi_1(W \setminus S) \to SU(2)$$

が存在する。

Traceless 表現：S の normal bundle の各ファイバーが $SU(2)$ の traceless な元に移る。

定理

$\mathcal{T}$ に対して、$T^4 = 1$ であるとする。$K \subset S^3$ とする。*properly embedded surface in* B^4 とする。このとき、

$$|h_{\mathcal{T}}(K) + \frac{1}{2}\sigma(K) - \frac{1}{4}S \cdot S| \leq b_1(S)$$

$S \cdot S$ は S の normal bundle のオイラー数

定理

$\mathcal{T}$ において $T^4 = 1$ であるとき、$K \subset S^3$ のとき、

$$|h_{\mathcal{T}}(K)| \leq \gamma_4(K)$$

clasp number

γ_4 結び目 K に対して、$K = \partial S \subset B^4$ となる non-orientable surface の S が存在したときの最小 b_1