ホモロジー球面から得られるレンズ空間たちについてIII

丹下基生(Motoo Tange) (RIMS)

結び目の数学2008年12月26日
東京女子大学

§1 導入

Doubly primitive knot

3次元多様体Yの中の結び目Kがdoubly primitiveとは次の条件を満たすものをいう。

・Yは種数2のヘガード分解$Y_1 \cup_\Sigma Y_2$を持つ。

・Kはそのヘガード曲面Σに埋め込まれている。

・KはY_1とY_2の基本群に元を自然に誘導するが、そのどちらもがπ_1の生成元になる。

レンズ空間手術予想(Berge,Gordon)

S^3のデーン手術によってレンズ空間が得られるならその結び目はdoubly primitive knotであろう。

ここでの主な問題

３次元多様体YとKはどのようなものをとればレンズ空間が作れるか？

・CGLS Philosophy

手術によってレンズ空間を作り、かつその作り方が特殊な場合、その係数は整数である。

ここで

・手術係数は整数

・Yはホモロジー３球面だけ

Fact(**Fintushel-Stern**)

レンズ空間$L(p,q)$があるホモロジー球面の整数手術から得られる必要十分条件はqが$\mathrm{mod}\,p$で平方剰余であること。

Fact

ポアンカレホモロジー球面からレンズ空間を得ることができる。しかしその係数は正の整数に限る。

注１：S^3 の場合はその対称性から向きを逆にする微分同相が存在するので係数は正も負も現れる。

注2：$\lambda = -1$ でdoubly primitive knotからレンズ空間を得るホモロジー球面は $\Sigma(2,3,5)$ と $\Sigma(2,3,7)$ しか知られていない。
$\lambda \leq -2$ の場合は後半。

$\Sigma(2,3,5)$ の場合

	p	h	$2g-p-1$
A_1	$14\ell^2+7\ell+1$	$\pm(7\ell+2)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
A_2	$20\ell^2+15\ell+3$	$\pm(5\ell+2)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
B	$30\ell^2+9\ell+1$	$\pm(6\ell+1)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
C_1	$42\ell^2+23\ell+3$	$\pm(7\ell+2)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
C_2	$42\ell^2+47\ell+13$	$\pm(7\ell+4)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
D_1	$52\ell^2+15\ell+1$	$\pm(13\ell+2)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
D_2	$52\ell^2+63\ell+19$	$\pm(13\ell+8)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
E_1	$54\ell^2+15\ell+1$	$\pm(27\ell+4)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
E_2	$54\ell^2+39\ell+7$	$\pm(27\ell+10)^{\pm 1} \mod p$	$-\lvert\ell\rvert$
F_1	$69\ell^2+17\ell+1$	$\pm(23\ell+3)^{\pm 1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
F_2	$69\ell^2+29\ell+3$	$\pm(23\ell+5)^{\pm 1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
G_1	$85\ell^2+19\ell+1$	$\pm(17\ell+2)^{\pm 1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
G_2	$85\ell^2+49\ell+7$	$\pm(17\ell+5)^{\pm 1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$

H_1	$99\ell^2+35\ell+3$	$\pm(11\ell+2)^{\pm1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
H_2	$99\ell^2+53\ell+7$	$\pm(11\ell+3)^{\pm1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
I_1	$120\ell^2+16\ell+1$	$\pm(12\ell+1)^{\pm1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
I_2	$120\ell^2+20\ell+1$	$\pm(20\ell+2)^{\pm1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
I_3	$120\ell^2+36\ell+3$	$\pm(12\ell+2)^{\pm1} \mod p$	$-2\lvert\ell\rvert$
J	$120\ell^2+104\ell+22$	$\pm(12\ell+5)^{\pm1} \mod p$	$-\lvert 2\ell+1\rvert$
K	191	15	-2

Fact

$\Sigma(2,3,6n\pm1)$からもレンズ空間を得ることができる。

このような表を他のホモロジー球面の場合に作りたい。

$$L(n(5\ell+2)^2 \pm (5\ell^2+5\ell+1), (5\ell+2)^2)$$
$$L(n(6\ell+1)^2 \pm (6\ell^2+3\ell), (6\ell+1)^2)$$
$$L(n(7\ell+2)^2 \pm (7\ell^2+5\ell+1), (7\ell+2)^2)$$
$$L(n(7\ell+4)^2 \pm (7\ell^2+9\ell+3), (7\ell+4)^2)$$
$$L(n(11\ell+2)^2 \pm (22\ell^2+9\ell+1), (11\ell+2)^2)$$
$$L(n(11\ell+3)^2 \pm (22\ell^2+13\ell+2), (11\ell+3)^2)$$
$$L(n(12\ell+1)^2 \pm (24\ell^2+8\ell), (12\ell+1)^2)$$
$$L(n(12\ell+2)^2 \pm (24\ell^2+12\ell+1), (12\ell+2)^2)$$
$$L(n(12\ell+5)^2 \pm (24\ell^2+16\ell+3)), (12\ell+5)^2)$$

では一般のブリースコーンホモロジー球面 $\Sigma(p,q,r)$ から得る方法はあるか？

予想

$\Sigma(p,q,r)$ は正の手術によってレンズ空間を得ることができるであろう。

ブリースコーンホモロジー球面しか現れないのか？⇒主結果

§2 レンズ空間を得る為の条件

キャッソン不変量の手術公式

$$-\lambda(Y)+\lambda_{CW}(-L(p,q))-s(1,p)=\frac{1}{2p}\Delta''_K(1)$$

この公式のヘガードフレアホモロジーによるカテゴリー化

$$\begin{tikzcd}
HF^+(Y) \arrow[rr] & & \oplus_{\mathfrak{t}\in Q^{-1}(\mathfrak{s})}HF^+(Y_0(K),\mathfrak{s}) \arrow[dl] \\
& HF^+(L(p,q),\mathfrak{s}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

内訳$(c_1(\mathfrak{s}) \neq 0)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_{d(Y)} \oplus HF_{\mathrm{red}}(Y) \arrow[rr, "F_1"] & & \bigoplus_{\mathfrak{t} \in Q^{-1}(\mathfrak{s})} HF_{\mathrm{red}}(Y_0(K), \mathfrak{t}) \arrow[dl, "F_2"] \\
& \mathcal{T}_{d(-L(p,q),\mathfrak{s})} \arrow[ul, "F_3"] &
\end{tikzcd}
$$

キャッソン不変量の公式

$$\lambda(Y) = \chi(HF_{\mathrm{red}}(Y)) - \frac{1}{2} d(Y)$$

$$\lambda_{CW}(W) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(W)} \left(\chi(HF_{red}(W, \mathfrak{s})) - \frac{1}{2} d(W, \mathfrak{s}) \right)$$

$Y=S^3$もしくは$\Sigma(2,3,5)$だとカテゴリー化の条件に強い制限をうける。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \arrow[rr, "F_1"] & & \bigoplus_{\mathfrak{t}\in Q^{-1}(\mathfrak{s})} HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K),\mathfrak{t}) \arrow[dl, "F_2"] \\
& \mathcal{T}_{d(-L(p,q),\mathfrak{s})} \arrow[ul, "F_3"] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{t}\in Q^{-1}(\mathfrak{s})} HF_{\mathrm{red}}(S^3_0(K),\mathfrak{t}) = \mathbb{Z}^{t_j(K)} = \mathbb{Z}[U]/U^{t_j} = \ker(F_3)$
$\Rightarrow 2g-1\le p,\ 0\le t_j(K)$

S^3上の手術によってレンズ空間や結び目に関する制限

Fact(Ozsváth-Szabó)

S^3の中の結び目Kの整数手術がレンズ空間を作るときKのアレクサンダー多項式の係数は±1か0

Fact(OSz-Ni)

doubly primitive knotはファイバー結び目。
一般にS^3の中の結び目Kの整数手術がレンズ空間を作るとき
Kはファイバー結び目。
(実は$Y - K$が既約であればKはファイバー結び目がいえる。)

注)
YがS^3でも$\Sigma(2,3,5)$でもない（non-L-space）ときは種数不等式は必ず成り立たない。(J.Rasmussen)

<u>例：$\Sigma(2,3,7)$</u>

$HF^+(\Sigma(2,3,7)) = \mathcal{T}_0 \oplus \mathbb{Z}_{(-1)}$

$\Sigma(2,3,7)_{10}(K) = -L(10.9)$

K:doubly primitive knot （genus$=6$） $2g-1>p$

$\Delta_K(t) = x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1 - 1/x^2 + 1/x^3 - 1/x^5 + 1/x^6$

$HF^+(Y_0(K), i)$ $(i=-5..5)$:$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$

ker$(F_3)(i=0..9)$: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, 0, 0,$\mathbb{Z}$, 0, 0, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \oplus \mathbb{Z}_{(-1)} \arrow[rr, "F_1"] & & \mathbb{Z}^{t_j(K)} \text{ or } \mathbb{Z}^{t_{-5}(K)} \oplus \mathbb{Z}^{t_5(K)} \arrow[dl, "F_2"] \\
& \mathcal{T}_{d(-L(10,9),\mathfrak{s})} \arrow[ul, "F_3"] &
\end{tikzcd}$$

ここですこしまとめ

・$L(p,q)$ を固定したときにそのレンズ空間を作る Y と K はどのようなバリエーションがあるか。

・種数とslopeの関係

・特にdoubly primitive knotのdual knot（Berge knotという）を用いて手術をするとどうなるか？

・あるホモロジー球面から得られるレンズ空間の族は2次関数的になるか？

・ホモロジー球面上の手術を分類すれば S^3 上のレンズ空間手術はよくわかるようになるか？

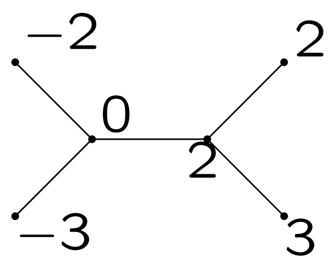
(S^3 上の手術は他の手術に比べて特別に見える。)

§3 主結果

主結果

レンズ空間を作るdoubly primitive knotはグラフホモロジー球面の中に存在する。
表参照。

例えば下の図式のグラフは整数デーン手術によってレンズ空間を生む。



$-5 \leq \lambda \leq -2$

$-5 \leq \lambda \leq -2$ を満たすブリースコーンホモロジー球面はdoubly primitive knotを内部に含む。

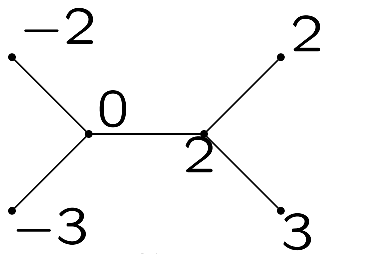
分類

$\lambda = -2$ $\Sigma(2,3,11), \Sigma(2,3,13), \Sigma(2,5,7), \Sigma(3,4,5), G_1, \alpha..$

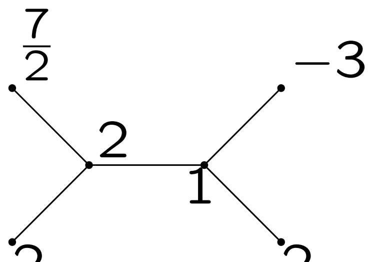
$\lambda = -3$ $\Sigma(2,3,17), \Sigma(2,3,19), \Sigma(2,5,9), \Sigma(2,5,11), \Sigma(3,4,7), \beta..$

$\lambda = -4$ $\Sigma(2,3,23), \Sigma(2,3,25), \Sigma(2,5,13), \Sigma(2,7,9), \Sigma(3,5,7), \Sigma(3,5,8), \gamma..$

$\lambda = -5$ $\Sigma(2,3,29), \Sigma(2,3,31), \Sigma(2,5,17), \Sigma(2,7,11), \Sigma(3,4,11), \Sigma(3,4,13), \Sigma(4,5,7), G_2, \delta, ..$



G_1



G_2

§4 計算方法

・Berge knotの手術から得られるホモロジー球面の基本群を計算する。
・Ozsváth-Szabóの不変量の計算（計算の紹介）

Berge knotの記述

$L(p,q,h) \quad h^2 = q \bmod p$

$c := \frac{(h+1-p)(h-1)}{2}$

<u>基本群の計算</u>(palindromic relatorをもつ)

$$\pi_1(Y) = \left\langle x_1, x_2 \middle| \prod_{i=1}^{p} x_1 x_2^{E_h(qi+1)}, \left(\prod_{i=1}^{h'-1} x_1 x_2^{E_h(qi+1)}\right) x_1 x_2^{-\tilde{a}_{h'c-h}} \right\rangle, \tag{1}$$

where $E_h : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ is defined to be

$$E_h(k) = \begin{cases} 1 & 1 \leq [k]_p \leq h \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\pi_1(Y - K) = \left\langle x_1, x_2 \middle| \prod_{i=1}^{p} x_1 x_2^{E_h(qi+1)} \right\rangle, \tag{2}$$

$\Rightarrow \Delta_K(t)$

plumbed mfdのヘガードフレアホモロジー

OSz: On the Floer homology of plumbed three-manifolds

G :negative definite graph of Y

$HF^+(-Y) \cong \mathbb{H}^+(G) \cong \mathbb{K}^+(G)$

$\mathbb{H}^+(G) \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{Char}(G), \mathcal{T}_0^+)$

$\mathbb{K}^+(G) = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathrm{Char}(G)/ \sim$

$K \in I \langle K, v \rangle + v^2 = 2n$を満たすとき、$n \geq 0$のとき、

$U^n \otimes (K + 2PD(v)) \sim K \;\; n \leq 0$のとき、

$K + 2PD(v) \sim U^n \otimes K$

$\mathbb{K}^+(G)$の中で$U^m \otimes K$と表せない元が重要(basic vector)

・<u>full pathの構成</u>(同値関係(横並び)を求め、加群の生成元を数える。)
$v^2 + 2 \leq \langle K, v \rangle \leq -v^2$ (initial vector)
I：initial vectors (finite)
$I \ni K_0 : K_0, K_1, \cdots, K_n$
v_iを$\langle K, v_i \rangle + v_i^2 = 0$となるvertex v_iに対して
$K_{i+1} = K_i + 2PD(v_i)$
つまり、$K_0 \sim K_1 \sim \cdots \sim K_n$

・<u>minimal relation</u>(関係式から加群の次元(縦並び)を計算する)
$I \ni K_i, K_j$に対して
$U^m \otimes K_i \sim U^n \otimes K_j$を満たす最小の$n, m$を求める。

$\Rightarrow$この2つのデータと、$d(Y) = \max_{K \in I} \frac{K^2 + |G|}{4}$から完全に$\mathbb{H}(G)$が求まる。
$\Rightarrow HF^+(Y)$

§5 問題

問題

・Y としてどのようなplumbed mfd（ヘガード種数が2）がありうるか？

・双曲構造をもつホモロジー球面上にdoubly primitive knotは存在するか？（おそらくある）

・グラフの構造を使ってレンズ空間手術が簡単に分かるか？

・レンズ空間手術同士網目でつながっている。

Thank you for your attention!!