

ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて

III

丹下 基生
(数理解析研究所)

Abstract

ザイフェルトホモロジー球面でないグラフホモロジー球面の中に doubly primitive knot が存在してその結び目にそってレンズ空間を作ることが出来ことを示す。また、 $p \leq 100$ においてレンズ空間を作るホモロジー球面のリストを示す。¹

1 Doubly primitive knots

3次元多様体 Y の結び目に沿ったデーン手術とは、 Y から結び目の管状近傍を取り除いて、管状近傍を違う写像で貼り付け、多様体を滑らかにすることによって新しい3次元多様体を構成する方法である。どのような手術によってどんな多様体を作られるのかが基本的で興味深い問題である。ここでは出来る多様体をレンズ空間に限って話を進めることにする。

Berge は [1] において doubly primitive knot を定義したが、ここでは少し一般化した状況で doubly primitive knot を定義しておく。

定義 1 3次元多様体 Y の中の結び目 K が doubly primitive knot であるとは次の性質を満たすものを言う。

- (1) Y は種数が 2 のヘガード分解 $Y_1 \cup_{\Sigma} Y_2$ をもつ。
- (2) K はそのヘガード曲面に埋め込まれている。
- (3) K は Y_1 と Y_2 に基本群の元を誘導するがそのどちらも生成元になっている。

doubly primitive knot は knot の isotopy class を考えるのではなく、ヘガード曲面の埋め込まれ方も考えるが、 Y_1 と Y_2 を入れ替えて考えたものは同じものとみなす。また向きも考えない。doubly primitive knot は次の性質を持つ。

事実 1 doubly primitive knot の手術をヘガード曲面に沿って手術するとレンズ空間を作ることができる。結局 doubly primitive knot のある整数手術によってレンズ空間が得られる。

Berge は [1] において $Y = S^3$ の場合に doubly primitive knot を定義し、次の予想を立てた。

予想 1 S^3 の結び目 K の手術によってレンズ空間が作られるとすると、その結び目は doubly primitive knot に isotopic である。

¹この研究はレンズ空間とホモロジー球面の間を doubly primitive knot を介して計算したものであり、まとめた結果にはまだ至っていない。

この予想は多くの人々の努力にもかかわらず未だ解決に至っていない。 Y が一般のホモロジー球面の場合にはどのようなことが言えるか。これがここで著者が問題にしたい意識である。レンズ空間がホモロジー球面の手術から得られるかどうかの判定は次の事実として知られている。

事実 2 (Fintushel-Stern) レンズ空間 $L(p, q)$ がホモロジー球面の整数手術から得られる為の必要十分条件は $-q$ が $\text{mod } p$ で平方剰余であることである。

問題意識 ここでは S^3 によらず一般のホモロジー球面 Y とその中の結び目 K によっていつレンズ空間を作ることができるか？

しかしこの問題は一般のホモロジー球面と結び目のペアだと制限がつきにくい。よって、結び目を doubly primitive に制限した場合を考える。doubly primitive knot は次のように分類されている。

事実 3 doubly primitive knot K は 2 つのパラメータ (p, h) によって分類される。

ここで事実 1 でできるレンズ空間が $L(p, q)$ である。 K の $L(p, q)$ 中の dual knot を \tilde{K} とすると $[\tilde{K}] \in H_1(L(p, q), \mathbb{Z})$ はある $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元と同一視される。この値を h とする。また構成の仕方から $h^2 = q \text{ mod } p$ が成り立つ。

しかし doubly primitive knot の pair の決め方 (p, h) は不定性があり、 $(p, h), (p, h'), (p, p-h), (p, p-h')$ は同じ doubly primitive knot を表す。このことは doubly primitive knot の定義の後に書いたことに対応する。また逆に (p, h) に対してただ 1 つ doubly primitive knot を定めることができる。よって (p, h) が表す doubly primitive knot は Fintushel-Stern の判定で存在する結び目の代表元になる。つまりこの代表元にはどのようなものがありうるかを研究することになる。

S^3 中にはいくつかの doubly primitive knot が埋め込まれていることが知られている。特にトラス結び目は doubly primitive knot として埋め込まれる。ケーブル結び目や双曲結び目としてもそのような結び目が存在することが知られている。また isotopic な doubly primitive knot もある。例えば $(5, 2)$ $(7, 2)$ は両方 trefoil knot を表す。

以前の研究集会「結び目のトポロジー IX, X」では筆者 [15, 16] はポアンカレホモロジー球面 $\Sigma(2, 3, 5)$ 、や一般にブリースコーンホモロジー球面上に doubly primitive knot が埋め込まれていることを報告した。ポアンカレホモロジー球面に関してはレンズ空間が $p \leq 2007$ までそのような doubly primitive knot を分類しており、それらはある 2 次関数的な無限族として現れていることも明らかにした。また、逆向きのホモロジー球面 $\bar{\Sigma}(2, 3, 5)$ 上にそのような結び目が存在しないことも証明した (手術の係数は正の整数に限っている)。[14] をみよ。

主結果は次である。

定理 1 2 つのホモロジー球面を splice してできるホモロジー球面内にも doubly primitive knot が存在する。

ホモロジー球面の splice という操作は次の章で見る。系として次も分かる。

系 1 特異点の link でないホモロジー球面の中にも doubly primitive knot は存在する。例えば $L(25, 6)$ を構成する type $(25, 9)$ の doubly primitive knot は特異点の link でないホモロジー球面上に存在する。

一般にブリースコーンホモロジー球面 $\Sigma(p, q, r)$ は \mathbb{C}^3 上の多項式 $f(x, y, z) = x^p + y^q + z^r$ の零点集合からできる特異点の link (長さ 1 の球面 $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ との交わり) である。

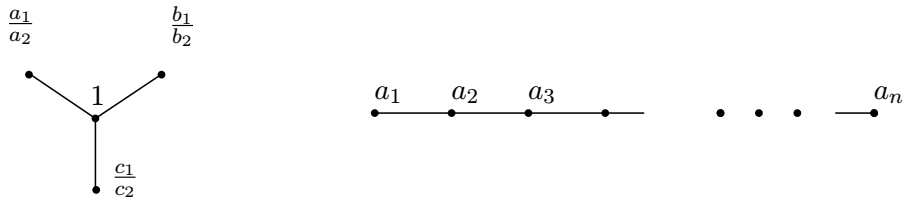
2 ホモロジー球面の splicing

plumbed 多様体の定義は省略する。例えば、[7]などをみよ。下の diagram は plumbed 多様体の例である。左は a_1, b_1, c_1 はどの2つも互いに素であり、 $-a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + b_2a_1c_1 + c_2a_1b_1 = \pm 1$ を満たすとき、ブリースコーンホモロジー球面 $\Sigma(a_1, b_1, c_1)$ を表す(ただし向きは無視する)。一般に3個以上の頂点が高々1つであるグラフから作られる plumbed 多様体は Seifert 多様体という。

また右の図はレンズ空間 $L(p, q)$ を表し、連分数を使って

$$-\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots \frac{1}{a_n}}}}$$

が成り立つ。



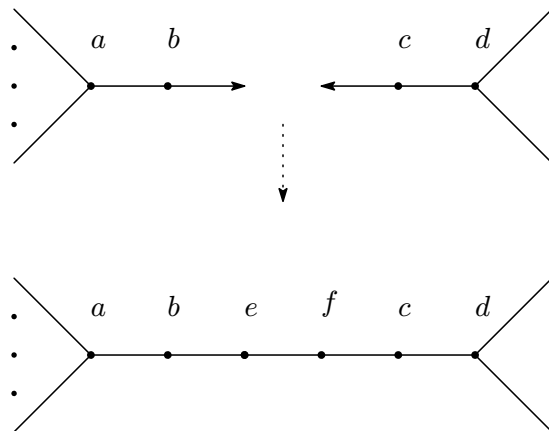
splicing の定義をする。

定義 2 ホモロジー球面 Y_1 と Y_2 中の結び目 K_1, K_2 の結び目に沿った *splicing* とは $Y_1 - N(K_1)$ と $Y_2 - N(K_2)$ のお互いの *meridian* と *longitude* をあわせるようにして貼り合わせてできるホモロジー球面のことをいう。ここではそれを $sp(Y_1, K_1; Y_2, K_2)$ とかく。特に Y_1 がブリースコーンホモロジー球面 $\Sigma(p, q, r)$ で、 K_1 が重複度 $s = p, q, \text{ or } r$ の *singular fiber* に沿った結び目であるとき、 $sp(\Sigma(p, q, r), s; Y_2, K_2)$ と書く。

2つの plumbed 多様体をその fiber に沿って splicing してやると再び plumbed 多様体になる。Seifert 多様体は plumbed 多様体の一種であるが2つの Seifert 多様体を splicing してやっても一般には Seifert 多様体に戻らない。plumbing graph に degree が3以上の頂点が増えていくことになるからである。

splicing をしてできる多様体の plumbing 表示は次のようになる。記法として plumbing の singular fiber から作られる結び目はその fiber を表す頂点を始点として矢印を書くことによって表す。

公式 1 ([18]) plumbed多様体を fiber に沿って splicing をしてやると次のような表示になる。 a, b, c, d はその頂点のバンドルのオイラー数を表す。



ここで $e = \det(\Gamma)/\det(\Gamma_0)$ $f = \det(\Delta)/\det(\Delta_0)$ である。 $\Gamma(\Delta)$ は上の図の左 (右) のグラフから求まる *linking matrix* であり、 $\Gamma_0(\Delta_0)$ は左 (右) の上の図の b, c を除いたグラフから求まる *linking matrix* を表す。

また、キャッソン不変量は次のような和公式によって求めることができる。

公式 2 ([18])

$$\lambda(\text{sp}(Y_1, K_1; Y_2, K_2)) = \lambda(Y_1) + \lambda(Y_2)$$

しかし splicing をすると一般には singularity の link にはならない。次のような判定条件が知られている。

事実 4 *spliced homology sphere* $\text{sp}(\Sigma(p, q, r); r\Sigma(p', q', r'), r')$ がある *singularity* の link になるための必要十分条件は $rr' > pqp'q'$ である。

3 主結果

定理 2 下の *spliced* ホモロジー球面 ((1) から (19)) 上に *doubly primitive knot* が存在する。

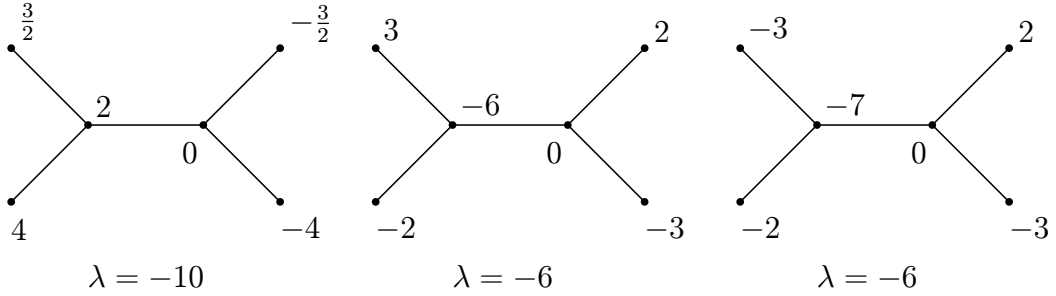
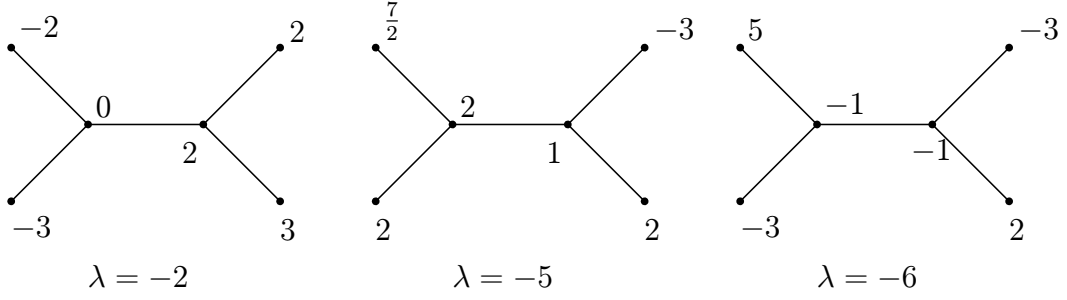
(1)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 5), 5; \Sigma(2, 3, 7), 7)$	$L(25, 6), L(35, 11), L(37, 21), L(47, 37), L(49, 22), L(63, 37)$
(2)	$\text{sp}(\Sigma(2, 5, 7), 5; \Sigma(2, 3, 17), 17)$	$L(86, 35)$
(3)	$\text{sp}(\Sigma(3, 5, 7), 7; \Sigma(2, 3, 13), 13)$	$L(41, 5), L(87, 13)$
(4)	$\text{sp}(\Sigma(3, 4, 11), 11; \Sigma(3, 4, 13), 13)$	$L(49, 8)$
(5)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 35), 35; S^3, (2, 3)\text{-torus knot})$	$L(53, 28)$
(6)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 37), 37; S^3, (2, 3)\text{-torus knot})$	$L(55, 26)$
(7)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 25), 25; \Sigma(3, 5, 7), 5)$	$L(57, 7)$
(8)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 5), 5; \Sigma(2, 7, 17), 17)$	$L(59, 14)$
(9)	$\text{sp}(\Sigma(3, 5, 8), 5; \Sigma(2, 3, 29), 29)$	$L(64, 9)$
(10)	$\text{sp}(\Sigma(3, 4, 11), 11; \Sigma(2, 5, 11), 11)$	$L(65, 9), L(77, 15), L(83, 29)$
(11)	$\text{sp}(\Sigma(4, 7, 9), 7; \Sigma(2, 3, 31), 31)$	$L(73, 6)$
(12)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 5), 5; \Sigma(3, 8, 29), 29)$	$L(77, 25)$
(13)	$\text{sp}(\Sigma(2, 5, 17), 17; \Sigma(3, 4, 7), 7)$	$L(91, 22)$
(14)	$\text{sp}(\Sigma(4, 5, 21), 21; \Sigma(4, 5, 19), 19)$	$L(81, 10)$
(15)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 5), 3; \Sigma(2, 5, 33), 33)$	$L(83, 17)$
(16)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 59), 59; S^3, (2, 5)\text{-torus knot})$	$L(89, 36)$
(17)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 61), 61; S^3, (2, 5)\text{-torus knot})$	$L(91, 36)$
(18)	$\text{sp}(\Sigma(2, 5, 23), 23; \Sigma(3, 10, 13), 13)$	$L(92, 13)$
(19)	$\text{sp}(\Sigma(2, 3, 17), 17; \Sigma(4, 5, 7), 7)$	$L(65, 36)$

これらを splicing してできた多様体の link 表示を求めると以下ようになる。次のようなグラフに沿って plumbing してできるホモロジー球面は内部に *doubly primitive knot* を含む。

以前の研究から $\Sigma(2, 3, 5)$ や $\Sigma(2, 3, 7)$ などからはレンズ空間を得ることができる *doubly primitive knot* が得られた。 *doubly primitive knot* はその Seifert 多様体の特異点を消してまっすぐに直すという役割があった (つまり 3 価頂点を 2 価頂点に直す)。しかし

4 計算

ここで主結果の計算方法を記す。



5 問題

References

- [1] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.
- [2] G. Bredon and J. W. Wood, *Non-orientable surfaces in orientable 3-manifolds*, Invent. Math. 7 (1969), 83-110.
- [3] R. Fintushel and R. Stern, *Constructing lens spaces by surgery on knots.*, Math. Z., 175(1):33-51,1980.
- [4] Y. Fukumoto and M. Furuta, *Homology 3-spheres bounding acyclic 4-manifolds*, Mathematical Research Letters 7, 757-756 (2000).
- [5] H. Goda and M. Teragaito, *Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129 (2000), no. 3, 501–515.
- [6] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, arXiv:math.GT/0310164.
- [7] 松本幸夫, *4次元のトポロジー* 日本評論社
- [8] Ozsváth Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. 173 (2003), no. 2, 179–261.
- [9] P. Ozsváth, Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2) 159 (2004), no. 3, 1027–1158.

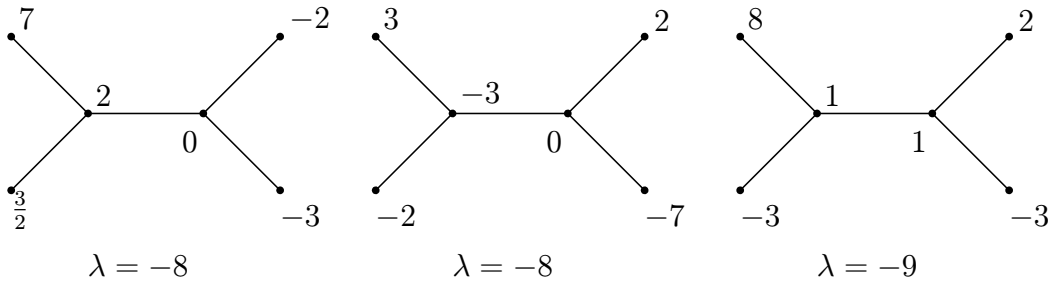


Figure 3: (7), (8), (9)

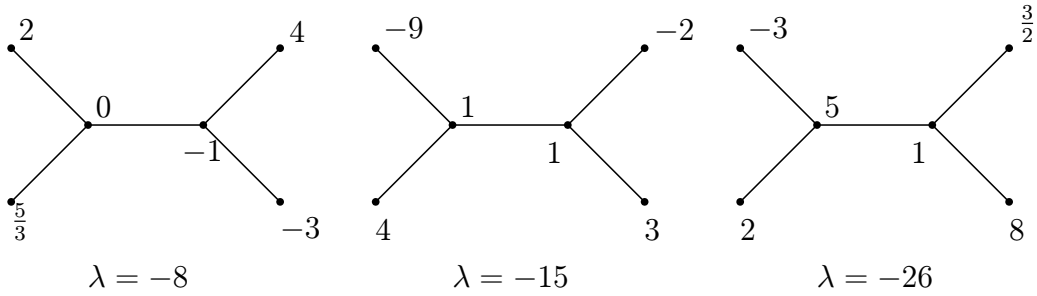


Figure 4: (10), (11), (12)

- [10] P. Ozsváth, Z. Szabó, On knot Floer homology and lens space surgeries, *Topology* **44** (2005), 1281-1300.
- [11] P. Ozsváth, Z. Szabó, The theta divisor and the Casson-Walker invariant, *math.GT/0006194*.
- [12] K. Ichihara and T. Saito, *Lens spaces obtainable by surgery on doubly primitive knots*, in preparation.
- [13] M. Tange, *Ozsváth-Szabó's correction term of lens surgery*, *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, to appear.
- [14] M. Tange, *On the non-existence of L-space surgery structure*, arXiv:0707.0197
- [15] 丹下 基生, ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて I, 「結び目のトポロジー IX」報告集
- [16] 丹下 基生, ホモロジー球面から生成されるレンズ空間たちについて II, 「結び目のトポロジー X」報告集
- [17] J. Rasmussen, *Lens space surgeries and a conjecture of Goda and Teragaito*, *Geometry & Topology* Vol.8 (2004) 1013–1031.
- [18] N. Saveliev, *Invariants for Homology 3-Spheres*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol 140. Low-Dimensional Topology, I. Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [19] M. Teragaito, *private communication*.
- [20] M. Teragaito, *Creating Klein bottles by surgery on knots*, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 781-794.

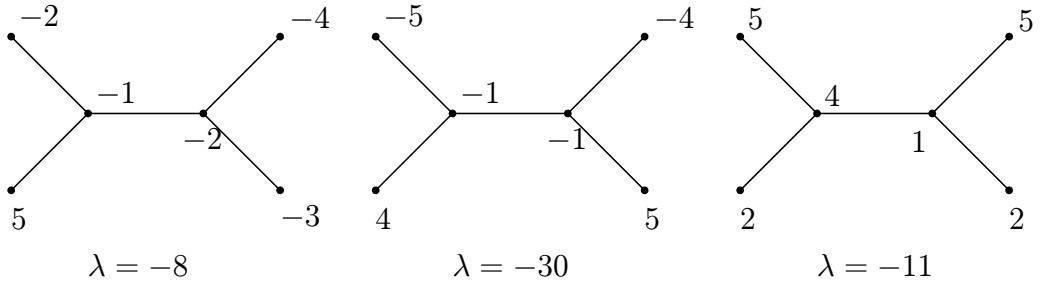


Figure 5: (13), (14), (15)

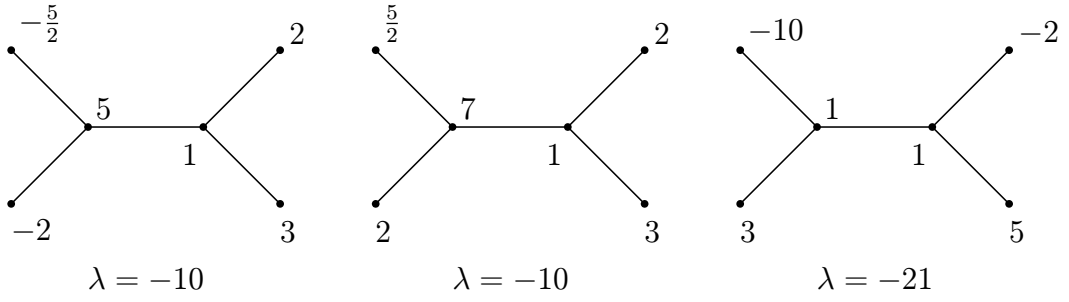


Figure 6: (16), (17), (18)

[21] M. Ue, The Fukumoto-Furuta and the Ozsváth-Szabó invariants for spherical 3-manifolds, preprint.

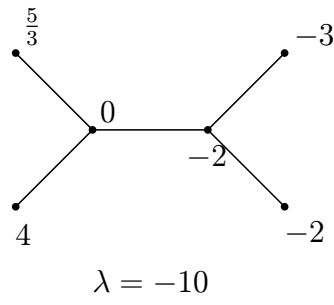


Figure 7: (19)