非負曲率アレキサンドルフ曲面のシュタイナー比について

印南信宏（新潟大理）

1　概要

P をユークリッド平面の有限点集合とする。P の点を総長が最も短くなるように線で結び合わせる問題が最短ネットワーク問題である。この問題には、２つのタイプがある。１つは、P の点以外の点を頂点として付け加えてはいけない場合であり、もう一つは P に新たに点を付け加えてもよい場合である。前者の解を最小全域木と呼び、後者の解を最小シュタイナー木と呼ぶ。それぞれ、MST(P)、SMT(P) と表す。新たに付け加えられた点をシュタイナー点と呼ぶ。

最小全域木を見つける計算量は少ないが、最小シュタイナー木を見つける計算量は、P の点の個数に関して指数関数的に増加する。したがって、最小全域木の長さが最小シュタイナー木の長さをどの程度に近似するかは重要である。すなわち、

$$\rho(E^2) = \inf_P \frac{L(\mathrm{SMT}(P))}{L(\mathrm{MST}(P))}$$

を求めることは重要である。この数をシュタイナー比と呼ぶ。

１９６８年に、Gilbert-Pollak によって、$\rho(E^2) = \sqrt{3}/2$ であることが予想され、１９９０年に、Du-Hwang によって、その予想は正しいとする論文が発表された。曲面上においても、有限集合に対して、同様に最短ネットワーク問題を考えることができる。１９９７年に、Rubinstein-Weng は、球面のシュタイナー比が平面のシュタイナー比 $\sqrt{3}/2$ と同じであるとする論文を発表した。２００６年に、Innami-Kim は、Poincaré 円板のシュタイナー比が 1/2 であることを証明した。

この講演では、非負曲率のアレキサンドルフ曲面のシュタイナー比についての研究経過を報告する。

2 アレキサンドルフ空間の性質

M を曲率が κ 以上の単連結なアレキサンドルフ空間、M_κ を κ-plane とする。$\triangle(pqr)$ を M の三角形とする。次の補題では、三角形 $\triangle(pqr)$ とは、最短測地線 $T(p,q)$、$T(q,r)$、$T(r,p)$ の和集合のことである。この三角形に対して、対応する辺の長さが等しい κ-plane 上の三角形 $\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})$ を $\triangle(pqr)$ の比較三角形と呼ぶ。次の補題の性質が成り立つ。ここで、曲率が κ 以上のアレキサンドルフ空間の定義は、完備、局所コンパクト、length space が次の補題の性質 (1) を満たすことである。

補題 1 (曲率が κ 以上のアレキサンドルフ空間の性質)**.** $\triangle(pqr)$ と $\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})$ に関して、次の性質が成り立つ。

(1) $x \in T(q,r)$、$x' \in T(\tilde{q},\tilde{r})$ が、$\mathrm{d}(q,x) = \mathrm{d}(\tilde{q},x')$ を満たすとき、$\mathrm{d}(p,x) \geq \mathrm{d}(\tilde{p},x')$ が成り立つ。

(2) $x \in T(p,q)$、$y \in T(p,r)$ と $x' \in T(\tilde{p},\tilde{q})$、$y' \in T(\tilde{p},\tilde{r})$ が、$\mathrm{d}(p,x) = \mathrm{d}(\tilde{p},x')$、$\mathrm{d}(p,y) = \mathrm{d}(\tilde{p},y')$ を満たすとき、$\mathrm{d}(x,y) \geq \mathrm{d}(x',y')$ が成り立つ。

(3) $\angle(pqr) \geq \angle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})$、$\angle(qrp) \geq \angle(\tilde{q}\tilde{r}\tilde{p})$、$\angle(rpq) \geq \angle(\tilde{r}\tilde{p}\tilde{q})$ が成り立つ。

アレキサンドルフ空間では最短測地線が分岐することはない。この補題から次の補題を証明することができる。

補題 2. M を曲率が κ 以上のアレキサンドルフ空間とする。$T = T_1 \cup \cdots \cup T_k$ は、端点を p, q とする M の最短線による折れ線とする。$\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{T}_k$ は、M_κ 上の折れ線で、各 $i = 1, \cdots, k-1$ に対して、$\widetilde{T}_i$ と $\widetilde{T}_{i+1}$ のなす角度は、T_i と T_{i+1} のなす角度に等しいとする。$\widetilde{T}$ の 2 つの端点 $\tilde{p}, \tilde{q}$ を結んでできる閉曲線が凸領域を囲むとする。そのとき、

$$\mathrm{d}(p,q) \leqq \mathrm{d}(\tilde{p},\tilde{q})$$

が成り立つ。

M を単連結で、曲率が κ 以上のアレキサンドルフ曲面とする。最小シュタイナー木に対して、平面と同様に次の補題が成り立つ。

補題 3. M 上の最小シュタイナー木 $\mathrm{SMT}(P)$ は次の性質を満たす。

(1) $\mathrm{SMT}(P)$ の端点は、P に属する。

(2) 2つの辺のなす角度は 120° 以上である。

(3) シュタイナー点の次数は3である。その点での2辺のなす角度は、120° である。したがって、特異点ではない。

(4) シュタイナー点の個数は P の個数より2以上少ない。

この補題の性質 (1)-(3) を満たす木をシュタイナー木と呼び、さらに、シュタイナー点の個数が P の個数より2少ないとき full であるという。

3 シュタイナー比

T を full シュタイナー木とする。T の端点 p, q が隣接しているとは、p と q を結ぶ T の最小部分木 $S(p,q)$ が凸折れ線になっているときをいう。線分 $T(p,q)$ と $S(p,q)$ で囲まれた領域を basic 領域と呼ぶ。T のすべての隣接点に対する basic 領域の和集合を T の特性領域と呼ぶ。T の端点を結ぶ特性領域内の最小全域木を最小内部全域木と呼び、$\mathrm{MIST}(T)$ と表す。

$$\rho_0 = \rho_0(E^2) = \inf_T \frac{L(T)}{L(\mathrm{MIST}(T))}$$

とおく。ここで、T は、すべての E^2 のシュタイナー木 T に亘る。Du-Hwang は $\rho_0(E^2) = \sqrt{3}/2$ が成り立つと発表した。シュタイナー比に関して次の評価を得る。

命題 4. M を単連結な非負曲率アレキサンドルフ曲面とする。P を M の有限点集合で、最小シュタイナー木 $T = \mathrm{SMT}(P)$ に対して、シュタイナー木 $\widetilde{T}$ の *basic* 領域が凸であれば、

$$\frac{L(\mathrm{SMT}(P))}{L(\mathrm{MST}(P))} \geqq \rho_0$$

が成り立つ。