3 次元空間形内の外的平坦なメビウスの帯について

直川耕祐 (東京工業大学理工学研究科 D2)

3 次元空間形内で任意に与えられた結び目に対し，これを含む外的平坦な閉じた帯の位相型を分類する．これは，Chicone-Kalton [2] 及び Rögen [8] の結果の拡張，精密化となっている．

3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ において，C^∞-写像 $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が**正則**であるとは，その速度ベクトル $\gamma'(s) := d\gamma/ds$ が $\mathbb{R}$ 上で消えないときをいう．C^∞-正則な空間閉曲線 γ が自己交叉を持たないとき，**単純閉曲線**または**結び目**という．結び目 γ を任意に与えて固定し，γ に沿う可展的な閉じた帯を構成する．ただし，帯が**可展的**であるとは，平坦な (つまり，Gauss 曲率が常に 0 の) 線織面となっているときをいう．このような閉じた帯 F の位相型は，捻り数によって決定される．帯 F の境界を B とおくとき，**捻り数**は，

$$\mathrm{Mtn}(F) := \frac{1}{2}\mathrm{Link}(\gamma, B)$$

で与えれる (cf. [8, Definition 3], [5])．ここで，$\mathrm{Link}(\gamma, B)$ は，γ と B の各連結成分との間の絡み数の総和を意味する．この定義は，γ の曲線としての向きの取り方によらない．捻り数は，帯が向き付け不可能であれば，半整数値である．また，帯の捻る方向が時計周りであれば，正の値をとる．s を γ の弧長パラメータとし，γ の曲率関数 $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ が消えない点において，捩率関数を

$$\tau(s) := \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\kappa(s)^2} \qquad (\text{ただし}\det\text{は行列式})$$

とおく．与えられた結び目に沿う可展的な閉じた帯の位相型は，次のように分類される．

定理 1. $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) を C^ω-正則な結び目 (つまり，実解析的かつ正則な結び目) とし，Z_κ をその曲率関数 κ の零点集合とする．捩率関数を τ とおく．このとき，次が成り立つ．

(1) $\tau(s)$ が $\mathbb{S}^1 \setminus Z_\kappa$ 上で恒等的に消えているとする．このとき，γ に沿う C^∞-正則かつ可展的な閉じた帯は，捻り数が 0 のもの以外に存在しない．

(2) $\tau(s)$ の符号が入れ替わるとする．このとき，各 $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対し，γ に沿う C^ω-正則かつ可展的な閉じた帯で，捻り数が n であるものが存在する．

(3) $\mathbb{S}^1 \setminus Z_\kappa$ 上で $\tau \leq 0$ であり，ある点 $s_0 \in \mathbb{S}^1$ で $\tau(s_0) < 0$ となっているとする．このとき，ある $\lambda_\gamma \in (1/2)\mathbb{Z}$ があって，次を満たす．

(i) 各 $n \geq \lambda_\gamma$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) に対して，γ に沿う C^ω-正則かつ可展的な閉じた帯で，捻り数が n であるものが存在する．

(ii) $n < \lambda_\gamma$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) ならば，γ に沿う C^∞-正則かつ可展的な閉じた帯で，捻り数が n であるものは存在しない．

$\tau \geq 0$ で，ある点 $s_0 \in \mathbb{S}^1$ で $\tau(s_0) > 0$ となっている場合も，$\mathbb{R}^3$ のある平面に関して $\gamma(s)$ を折り返せば，(3) と同様の結果が成り立つことが分かる．

$Z_\kappa = \emptyset$ のとき，非存在の結果 (1) と (3-ii) は，[2] によって示されている．また，[2] では，曲率関数が消えない C^ω-正則な結び目 γ に対し，もしその捩率関数に負となる点があれば，γ の Frenet 枠を基準にした「捻り数」が 1/2 の C^ω-正則かつ可展的な Möbius の帯が存在することも示している．したがって，定理 1 は，[2] の結果を Z_κ が空でない場合へ拡張したものとなっている．ここで，曲率関数が零点を許すという仮定は，重要であることに注意する．例えば，可展的な Möbius の帯が閉測地線を含むとき，**展直的な Möbius の帯**という．展直的な Möbius の帯は，『帯状の長方形の「紙」の両端をつなげて作れる』という点で重要である (cf. [5, Proposition 2.14])．このような Möbius の帯の閉測地線は，曲率関数の零点が必ず存在する．また，[7] より，展直的な Möbius の帯の延長上には，カスプ辺以外の特異点が少なくとも 3 つ存在する．さらに，その特異点が，もし閉測地線の曲率関数が零となる点を通る漸近線上にあれば，「波面でない」特別な特異点 (例えば，カスプ状交叉帽子，オープン・スワローテイルなど) になっている．

[8] は，γ が C^∞ 級のとき，捻り数が $n \geq \lambda_\gamma$ であるような，γ に沿う C^∞-正則な閉じた帯の存在を示した．そこで，もし γ が C^ω 級なら，構成される閉じた帯も C^ω 級となることが期待される．この意味で，定理 1 は [8] の結果の精密化となっている．C^ω 級の閉じた帯の構成のため，指定された複数の点におけるジェットを固定しながら，C^∞-関数を Fourier 多項式で近似するという，テクニカルな議論を必要とした．

次に，他の空間形への定理の一般化について考える．3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の平坦曲面は，向き付け可能である (cf. [6])．特に，$\mathbb{H}^3$ には平坦な Möbius の帯が存在しない．一方で，3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ においては，次の事実が知られている．

事実 2 (Aledo-Gàlvez-Mira [1], 2009)**.** $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ を C^∞-正則な結び目とする．このとき，任意の $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対し，捻り数が n であるような，γ に沿う平坦かつ C^∞-正則な閉じた帯が存在する．

したがって，$\mathbb{S}^3$ には，C^∞ 級の平坦な Möbius の帯が豊富に存在する．ところが，次が成り立つ．

事実 3 (Gàlvez-Mira [3], 2010)**.** $\mathbb{S}^3$ 内の 平坦かつ C^ω-正則な曲面は，向き付け可能である．

特に，$\mathbb{S}^3$ には，C^ω 級の平坦な Möbius の帯は存在しない．したがって，C^ω 級の平坦な Möbius の帯が存在するのは，3 つの空間形のうち $\mathbb{R}^3$ 内に限られる．

以上のように，平坦曲面の振る舞いは，空間形により異なる．しかし，「平坦曲面」の代わりに「外的平坦な曲面」を考えると，定理 1 は自然に一般化される．ここで，**外的平坦**とは，曲面の外的曲率 $K_{\mathrm{ext}} := \lambda_1\lambda_2$ (λ_1，λ_2 : 主曲率) が恒等的に 0 であるときをいう．空間形の曲率を c，曲面の Gauss 曲率を K とおくと，Gauss 方程式から

$$K = K_{\mathrm{ext}} + c$$

が成り立つ．$\mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3$ 内の完備かつ外的平坦な (特異点付き) 曲面の非自明な例については，Honda [4] を見よ．定理 1 は，他の空間形へ外的平坦性の下で，次のように拡張される．

主定理 4. $\mathbb{H}^3$ および $\mathbb{S}^3$ における外的平坦な閉じた帯に対して，定理 1 と同じ主張が成り立つ．

このことから，外的平坦性は，$\mathbb{R}^3$ の平坦性の拡張として，自然な一般化であると考えられる．実際，主定理 4 は，定理 1 とほぼ同じ手順で証明することができる．

定理 1 の証明の概要を述べる．s を C^ω-正則な結び目 γ の弧長とし，$\mathbb{R}^3$ の拡大縮小により，$\gamma(s+2\pi) = \gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) が成り立っているとする．

- $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ を γ の Frenet 枠とする ($\boldsymbol{e}$ は単位接ベクトル，$\boldsymbol{n}$ は主法線ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は従法線ベクトルである)．γ の実解析性を使って，拡張された主法線ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$，拡張された従法線ベクトル $\hat{\boldsymbol{b}}$ を定義する．さらに，拡張された曲率関数 $\hat{\kappa} := \boldsymbol{e}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ と捩率関数 $\hat{\tau} := -\hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ を定義する．このとき，$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, $\hat{\kappa}$ は，γ に沿って一周するとき，符号が逆になることがあるが，$\hat{\tau}$ は 捩率関数 τ に符号を含めて一致する．
- $\epsilon > 0$ を十分小さな数とし，$F_{\gamma,\xi}(s,u) = \gamma(s) + u\xi(s)$ ($s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon$) を C^ω-正則な閉じた帯とする．このとき，ξ を $\{\boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$ の一次結合として，

  $$\xi(s) = p(s)\boldsymbol{e}(s) + R(s)\cos\theta(s)\ \hat{\boldsymbol{n}}(s) + R(s)\sin\theta(s)\ \hat{\boldsymbol{b}}(s)$$

  と書く ($p(s)$, $\theta(s)$, $R(s)$ は C^ω-関数)．このとき，ある整数 m が存在して，

  $$\theta(s+2\pi) = \theta(s) + m\pi \qquad (s \in \mathbb{R})$$

  が成り立つ．以降，ξ には，$R(s) \equiv 1$ となる正規化を施しておく．

- $\mathrm{Mtn}(F_{\gamma,\xi}) = \mathrm{Mtn}(F_{\gamma,\hat{\boldsymbol{n}}}) + m/2$ が成り立つ．実は，右辺の $\mathrm{Mtn}(F_{\gamma,\hat{\boldsymbol{n}}})$ が定理 1 の λ_γ に一致する．ただし，$F_{\gamma,\hat{\boldsymbol{n}}}(s,u) = \gamma(s) + u\hat{\boldsymbol{n}}(s)$ $(s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$ である．
- $F_{\gamma,\xi}$ が可展的であるための必要十分条件は，$\det(\gamma', \xi, \xi') \equiv 0$ である．よって，

$$(\gamma', \xi, \xi') = (\boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}) \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \cos\theta & p\hat{\kappa} - (\theta' + \hat{\tau})\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & (\theta' + \hat{\tau})\cos\theta \end{pmatrix}$$

  より，可展的であるための必要十分条件は，

$$\theta' = p\hat{\kappa}\sin\theta - \hat{\tau} \tag{1.1}$$

  となる．
- 帯の非存在の主張 (1) と (3-ii) については，[2] の結果から従う．帯の存在の主張 (2) と (3-i) については，$\theta(s)$ をうまく選んで，$p(s)$ が (1.1) を満たし，かつ実解析的に滑らかとなるようにする．このとき，指定された複数の点におけるジェットを固定しながら，C^∞-関数を Fourier 多項式で近似するテクニックを用いる．

最後に，主定理 4 の証明の概要について述べる．空間形が $\mathbb{H}^3$ の場合を考える．$\mathbb{S}^3$ の場合も同様の手順で示せる．

- $(\mathbb{L}^4; \langle,\rangle)$ を Lorentz-Minkowski 空間とする．ただし，この Lorentz 内積は，$x = {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = {}^t(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{L}^4$ に対し，

$$\langle x, y\rangle := -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

  で与えられる．このとき $\mathbb{H}^3$ を

$$\mathbb{H}^3 = \{x = {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \; ; \; \langle x, x\rangle = -1, \; x_0 > 0\}.$$

  とみなす．
- $\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ を C^ω-結び目，$\xi = \xi(s) : \mathbb{R} \longrightarrow T\mathbb{H}^3$ を γ に沿う 0 でない C^ω-ベクトル場とする．ただし，各 $x \in \mathbb{H}^3$ に対し，

$$T_x\mathbb{H}^3 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^4 \; ; \; \langle x, \boldsymbol{v}\rangle = 0\} \subset \mathbb{L}^4$$

  とみなす．
- 以上の設定の下で，$\mathbb{H}^3$ の線織面は，

$$F_{\gamma,\xi}(s,u) = \gamma(s)\cosh u + \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\sinh u$$

  と書ける．

- $\mathbb{R}^3$ の場合と同様に，$\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$, $\hat{\kappa}$, $\hat{\tau}$ を定義する．ξ から，$p(s)$, $\theta(s)$ が定まる．
- $F_{\gamma,\xi}$ が 外的平坦であるための必要十分条件は，$\det(\gamma, \gamma', \xi, \xi') \equiv 0$ である．したがって，

$$(\gamma, \gamma', \xi, \xi') = (\gamma, \boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}) \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & \cos\theta & p\hat{\kappa} - (\theta' + \hat{\tau})\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & (\theta' + \hat{\tau})\cos\theta \end{pmatrix}$$

より，外的に可展的であるための必要十分条件は，

$$\theta' = p\hat{\kappa}\sin\theta - \hat{\tau}$$

となる．これは $\mathbb{R}^3$ の場合 (1.1) と全く同じ形をしている．

- 後は，$\mathbb{R}^3$ の場合と同様，C^ω-関数 $p(s)$ と $\theta(s)$ の構成問題に帰着される．

参考文献

[1] J. A. Aledo, J. A. Gàlvez and P. Mira: *A D'Alembert formula for flat surfaces in the 3-sphere*, J. Geom. Anal. **19** (2009), 211–232.

[2] C. Chicone and N. J. Kalton: *Flat embeddings of the Möbius strip in* $\mathbb{R}^3$, Commun. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 31–50.

[3] J. A. Gàlvez and P. Mira: *Isometric immersions of* $\mathbb{R}^2$ *into* $\mathbb{R}^4$ *and perturbation of Hopf tori*, Math. Z. **266** (2010), 207–227.

[4] A. Honda: *Isometric immersions of the hyperbolic plane into the hyperbolic space*, to appear in Tohoku Math. J.

[5] Y. Kurono and M. Umehara: *Flat Möbius strips of given isotopy type in* R^3 *whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, Geom. Dedicata **134** (2008), 109–130.

[6] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada: *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 265–299.

[7] K. Naokawa: *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, to appear in Osaka J. Math.

[8] P. Røgen: *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 589–606.