

# $\mathbb{R}^n$ の部分多様体の Riesz エネルギーの正則化と球体の特徴づけ

今井 淳 (千葉大学)

## 概要

$X$  を  $\mathbb{R}^n$  の  $m$  次元コンパクト部分多様体で,  $m = n$  または  $\partial X = \emptyset$  を満たすものとする.  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_X \int_X |x - y|^z dx dy$  および  $\int_X \int_{\partial X} |x - y|^z dx dy$  を解析接続により  $\mathbb{C}$  上の有理型関数に拡張すると, 留数あるいはその関数を正則化したものの値から, 体積・表面積や (結び目の) エネルギーなど,  $X$  の幾何的な量が得られる. 球体の特徴づけなど, 積分幾何学へも応用できる.

## 1 イントロダクション

$M$  を  $\mathbb{R}^n$  の  $m$  次元閉部分多様体,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  のコンパクトボディ (有界開集合の閉包) とする. 簡単のため, 最初は  $M, \Omega$  は滑らかとする. 複素数  $z$  に対し,  $X$  を  $M$  または  $\Omega$  として,

$$I_z(X) = \int_{X \times X} |x - y|^z dx dy \quad (1.1)$$

を考える.  $dx, dy$  は  $M, \Omega$  の標準的な Lebesgue 測度とする. これは  $\Re z$  が十分大きいとき ( $\Re z > -\dim X$  のとき) に収束し,  $z$  の正則関数となる. 解析接続で定義域を拡張すると, いくつかの負整数で 1 位の極のみを持つ  $\mathbb{C}$  上の有理型関数を得られる. これを多様体  $X$  の Brylinski ベータ関数と呼び,  $B_X(z)$  とかき, この留数を多様体  $X$  の留数と呼ぶことにする. また,  $B_X(z)$  の値, ただし  $z$  が  $B_X$  の極となる場合は

$$\lim_{w \rightarrow z} \left( B_X(w) - \frac{\text{Res}(B_X, z)}{w - z} \right) \quad (1.2)$$

を多様体  $X$  の  $z$ -エネルギーとよび,  $E_z(X)$  とかく.  $X = \Omega$  で  $-n < z < 0$  のときには, コンパクトボディ  $\Omega$  の ( $\chi_\Omega$  の) Riesz  $z$ -エネルギーと一致する.

$X$  がコンパクトボディ  $\Omega$  の場合はさらに

$$I_z(\Omega, \partial\Omega) = \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} |x - y|^z dx dy \quad (1.3)$$

も考え, これから同様にコンパクトボディ  $\Omega$  の相対 Brylinski ベータ関数  $B_{\Omega, \partial\Omega}(z)$ , 相対留数, 相対  $z$ -エネルギー  $E_z(\Omega, \partial\Omega)$  が定義できる.

注 1  $M, \Omega$  の regularity が落ちると, ベータ関数の定義域が狭くなる. 例えば閉部分多様体  $M^m$  が  $C^k$ -級 ( $k \geq 2$ ) ならば,  $B_M(z)$  は  $\Re z > -m - k + 1$  で定義される.

ベータ関数は, 閉部分多様体に対して  $m = 1$  のとき Brylinski ([B]),  $m \geq 2$  のとき Fuller-Vemuri ([FV]), コンパクトボディに対しては, O.-Solanes ([OS2]) で研究された. ここで述べることの一部は, Gil Solanes 氏 (バルセロナ自治大学) との共同研究に基づくものである.

## 2 解析接続と留数

解析接続は具体的には以下の手順でなされる. まず 1 変数関数の積分に帰着させる.

(1) 閉部分多様体  $M$  に対して:

$$\psi_{M,x}(t) = \text{Vol}(M \cap B_x^n(t)), \quad \varphi_{M,x}(t) = \psi'_{M,x}(t)$$

とおく. ただし  $B_x^n(t)$  は中心  $x$  半径  $t$  の  $n$  次元ボールである. すると

$$\int_{M \times M} |x - y|^z dx dy = \int_0^\infty t^z \left( \int_M \varphi_{M,x}(t) dx \right) dt \quad (2.1)$$

が  $\Re z > -m$  で成立 ([OS2] Proposition 3.3).  $M \cap B_x^n(t)$  は [KP] で extrinsic ball と呼ばれ,  $\psi_{M,x}(t)$  の級数展開の最初の 2 項までの係数が計算されている.

閉部分多様体  $M$  が  $C^{k+1}$ -級 ( $k \geq 1$ ) とすると, ある  $C^k$ -級関数  $\bar{\varphi}_{M,x}$  が存在して  $\varphi_{M,x}(t) = t^{m-1} \bar{\varphi}_{M,x}(t)$  と書け,  $\bar{\varphi}_{M,x}(0) = \sigma_{m-1}$ ,  $\bar{\varphi}_{M,x}^{(2j-1)}(0) = 0$  ( $1 \leq 2j-1 \leq k$ ) が成立.

(2) コンパクトボディ  $\Omega$  に対して:

$$\int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^z dx dy = \frac{-1}{(z+2)(z+n)} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} |x - y|^{z+2} \langle \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y \rangle dx dy \quad (2.2)$$

が  $\Re z > -n$ ,  $z \neq -2$  で成立する ([OS2] Lemma 4.1). ただし  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y$  は  $x, y$  における  $\Omega$  の外向き単位法ベクトル. そこで

$$\psi_{\nu,x}(t) = \int_{\partial\Omega \cap B_x^n(t)} \langle \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y \rangle dy, \quad \varphi_{\nu,x}(t) = \psi'_{\nu,x}(t),$$

とおくと

$$\int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^z dx dy = \frac{-1}{(z+2)(z+n)} \int_0^\infty t^{z+2} \left( \int_{\partial\Omega} \varphi_{\nu,x}(t) dx \right) dt \quad (2.3)$$

が  $\Re z > -n$ ,  $z \neq -2$  のとき成立する.

コンパクトボディ  $\Omega$  が  $C^{k+1}$ -級 ( $k \geq 1$ ) とすると,  $C^k$ -級関数  $\bar{\varphi}_{\nu,x}$  が存在して  $\varphi_{\nu,x}(t) = t^{n-2} \bar{\varphi}_{\nu,x}(t)$  とかけ,  $\bar{\varphi}_{\nu,x}(0) = \sigma_{n-2}$ ,  $\bar{\varphi}_{\nu,x}^{(2j-1)}(0) = 0$  ( $1 \leq 2j-1 \leq k$ ) が成立.

以上のことから, いずれの場合も, 1 変数の積分  $\int_0^\infty t^w \phi(t) dt$  の解析接続に帰着されることが分かる.

以下,  $\sigma_d$  は  $d$  次元単位球面の体積とする. [GS] Ch.1, 3.2 の公式

$$\int_0^\infty t^w \phi(t) dt = \int_0^1 t^w \left[ \phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t - \dots - \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} \right] dt + \int_1^\infty t^w \phi(t) dt + \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{\phi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!(w+j)}$$

を考えると,  $\phi(t)$  が  $C^k$ -級なら, 右辺第一項の被積分関数が定数倍を除いて  $t^{w+k}$  で抑えられるので, 右辺第一項の積分は  $\Re w > -k-1$  で収束する. よって左辺は  $\Re w > -k-1$  で有理型になり,  $w = -1, \dots, -k$  で一位の極を持ち, その留数は  $\phi^{(j-1)}(0)/(j-1)!$  で与えられる. これに,  $M$  の場合  $w = z + m - 1$ ,  $j = 2i + 1$  を代入し,  $\Omega$  の場合  $w = z + n$ ,  $j = 2i + 1$  を代入すれば以下が分かる.

定理 2 ([B, FV, OS1])

- (1)  $M$  が  $\mathbb{R}^n$  の  $C^{k+1}$ -級 ( $k \geq 1$ )  $m$  次元閉部分多様体とすると, そのベータ関数  $B_M(z)$  は  $\Re z > -m - k$  で有理型.  $z = -m - 2i$  ( $0 \leq 2i \leq k-1$ ) で 1 位の極を持ち得て, その留数は  $\bar{\varphi}_{M,x}^{(2i)}(0)$  の  $M$  上の積分により与えられる. 特に

$$\text{Res}(B_M, -m) = \sigma_{m-1} \text{Vol}(M). \quad (2.4)$$

$m = 1, 2$  の場合,  $C$  を曲線,  $\kappa$  を曲率,  $M^2$  を  $\mathbb{R}^3$  の曲面,  $\kappa_1, \kappa_2$  を主曲率とすると, 2 番目の留数は,

$$\text{Res}(B_C, -3) = \frac{1}{4} \int_C \kappa(x)^2 dx, \quad \text{Res}(B_M, -4) = \frac{\pi}{8} \int_M (\kappa_1 - \kappa_2)^2 dx. \quad (2.5)$$

- (2)  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の  $C^{k+1}$ -級 ( $k \geq 1$ ) コンパクトボディとすると, そのベータ関数  $B_\Omega(z)$  は  $\Re z > -n - k - 1$  で有理型.  $z = -n$  および  $z = -n - (2i + 1)$  ( $1 \leq 2i + 1 \leq k$ ) で 1 位の極を持ち得る.  $z = -n$  における留数は (2.2) を用いて,  $z = -n - (2i + 1)$  での留数は  $\bar{\varphi}_{\nu,x}^{(2i)}(t)$  の  $\partial\Omega$  上の積分により与えられる. 特に

$$\text{Res}(B_\Omega, -n) = \sigma_{n-1} \text{Vol}(\Omega), \quad \text{Res}(B_\Omega, -n-1) = -\frac{\sigma_{n-2}}{n-1} \text{Vol}(\partial\Omega), \quad (2.6)$$

$k_1, \dots, k_{n-1}$  を  $\partial\Omega$  の主曲率,  $H = \frac{1}{n-1} \sum_i k_i$  を平均曲率,  $K = \sum_{i < j} k_i k_j$  をスカラー曲率とすると,

$$\text{Res}(B_\Omega, -n-3) = \frac{\sigma_{n-2}}{24(n^2-1)} \int_{\partial\Omega} (3(n-1)^2 H^2 - 4K) dx.$$

注: 留数が 0 になることもある.

### 3 多様体のベータ関数とエネルギー

ここでは簡単のため  $M, \Omega$  は滑らかとする.

(1) 閉部分多様体  $M$  に対して:

- $M = S^m$  のとき  $B_{S^m}(z)$  はベータ関数を用いて

$$B_{S^m}(z) = 2^{z+m-1} \sigma_m \sigma_{m-1} B\left(\frac{z+m}{2}, \frac{m}{2}\right).$$

と表される ([B, FV]). 極の数は,  $m$  が奇数のときには無限,  $m$  が偶数のときには  $m/2$  である.

- $m = 1, z = -2m = -2$  のとき  $B_C(-2)$  は, [O1] の結び目のエネルギーと一致する ([B]). これは Möbius 変換で不変となる ([FHW]).

- $m = 2, M^2 \subset \mathbb{R}^3, z = -2m = -4$  のときに (1.2) で得られるエネルギーは Möbius 変換で不変ではない. これは留数がスケール変換でうまく振舞わないためである ([OS2]).

命題 3 ([OS2])  $m$  が奇数ならば  $E_{-2m}(M) = B_M(-2m)$  は Möbius 変換で不変となる.

$m$  が偶数ならば  $E_{-2m}(M)$  は Möbius 変換で不変とならないと予想している.

(2) コンパクトボディ  $\Omega$  に対して: コンパクトボディのベータ関数は fractional perimeter  $\int_{\Omega \times \Omega^c} |x-y|^z dx dy$  ( $-n-1 < \Re z < n$ ) の正則化とも考えられる ( $\Omega^c$  は補空間).

- $\Omega$  が 単位球体  $B^n$  の場合は  $B_{B^n}(z)$  はベータ関数を用いて

$$B_{B^n}(z) = \frac{2^{z+n} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2}}{(n-1)(z+n)} B\left(\frac{z+n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

と表される ([HR] など). 極の数は  $n$  が奇数のとき  $(n+3)/2$ ,  $n$  が偶数のとき無限である.

- $n = 2, z = -4$  のとき  $B_\Omega(-4)$  は [OS1] で与えられた平面領域  $\Omega$  の Möbius 不変なエネルギーになる.

定理 4 ([OS2]) (1.2) で与えられるエネルギー  $E_z(\Omega)$  が Möbius 変換で不変となるのは,  $n$  が偶数で  $z = -2n$  のとき, かつそのときに限る.

- (2.2) または (2.6) から, 体積・面積を与える以下の公式を得る.

$$\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} |x-y|^{2-n} \langle \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y \rangle dx dy \quad (n > 2),$$

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \log|x-y| \langle \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y \rangle dx dy \quad (n = 2).$$

### 4 留数とエネルギーの性質

§§ 2, 3 から分かるように, 積分 (1.1) から  $M, \Omega$  または  $\partial\Omega$  に対する幾何学的な量が 2 種類得られる:

- Brylinski ベータ関数の留数として得られる量. § 2 でみたように, 曲率など局所的な量の積分として得られる.
- 多様体の  $z$ -エネルギー. § 3 でみたように, ポテンシャルなど大域的な量の積分として得られる. 部分多様体の幾何学的な複雑さを測ることができる. 今回は詳しく述べるができなかったが, この論説で扱っている話題の発端は結び目のエネルギー ([O1]) で, これは「結び目の空間になんらかのエネルギーを定義し, 与えられた結び目型の中でそのエネルギーを最小とするものとして, その結び目型の標準的な形を定義できないか」という問題 (作間, 福原) が動機となっている.

## 5 ベータ関数・二点間距離分布による球の同定問題

### 5.1 積分幾何からの準備

$r \geq 0$  に対し,  $f_X(r) = \text{Vol}(\{(x, y) \in X \times X : |x - y| \leq r\})$  を  $X$  の **interpoint distance distribution** と言う.  $f'_X$  の Mellin 変換は (1.1) の積分と一致する:

$$(\mathcal{M}f'_X)(s+1) = \int_0^\infty r^s f'_X(r) dr = \int_{X \times X} |x - y|^s dx dy = I_s(X). \quad (5.1)$$

コンパクトボディ  $\Omega$  が凸のとき凸体といい, 積分幾何学の主要な研究対象の一つである. このとき  $r \geq 0$  に対し,  $g_\Omega(r) = \mu(\{\text{line } \ell : \text{Length}(\ell \cap \Omega) \leq r\})$  を  $\Omega$  の **chord length distribution** と言う. ただし,  $\mathcal{E}_1$  は  $\mathbb{R}^n$  の直線全体の集合,  $\mu$  はその上の合同変換不変な測度とする. 積分幾何学の Blaschke-Petkantschin の公式 ([San] (4.2) p.46) により凸体に対しては interpoint distance distribution と chord length distribution は同値である. Crofton の交叉公式より  $\Omega$  および  $\partial\Omega$  の体積は定数倍をのぞき, それぞれ chord length distribution を用いて

$$\int_{\mathcal{E}_1} \text{Length}(\Omega \cap \ell) d\mu(\ell) = \int_0^\infty r g'_\Omega(r) dr \quad \text{および} \quad \int_{\mathcal{E}_1} \chi(\Omega \cap \ell) d\mu(\ell) = \int_0^\infty g'_\Omega(r) dr \quad (5.2)$$

で与えられる. ただし  $\chi$  は Euler 数である ([Fed], 3.2.26).

### 5.2 球体・球面の特徴づけ

**問題 5**  $B_X(z) = B_{X'}(z) (\forall z) \implies (\mathbb{R}^n \text{ の合同変換を除いて}) X = X'$  か?

という問題を考えたい. ただしこのままでは反例がある. Mallows-Clark [MC] が, 凸体は chord length distribution で決まるか, という Blaschke 予想に対する反例として挙げた平面凸多角形のペアが上の問題の反例にもなっている. ただ Waksman [W] はこれは例外的で, “generic” な平面凸多角形は chord length distribution で決まることを示した. このことから, “generic” な平面凸多角形は interpoint distance distribution で, あるいはベータ関数で決まることが従う.

一方, 凸という条件をはずすと, Caelli [Ca] は合同でないが interpoint distance distribution が等しい (したがってベータ関数も等しい) ような平面の部分集合のペアを (いくらでも) 作る方法を与えた. そこで, 弱い問題

**問題 6** 上の問題で一方がボール・球面だったら正しいか?

を考えてみよう. この問題も凸という条件が付けば既知である. 凸体  $\Omega$  とボールのベータ関数が一致すれば, interpoint distance distribution も chord length distribution も一致することになり (5.2) より, 体積と “表面積” も一致する. したがって一般の等周不等式 ([Fed]) より  $\Omega$  はボールになる. 凸という条件を外したものが次の定理である.  $A$  と  $B$  が合同であることを  $A \cong B$  と書くことにする.

**定理 7** ([O2])  $X$  をある次元のユークリッド空間の閉部分多様体またはコンパクトボディとする.

- (1)  $X$  が  $C^2$ -級のコンパクトボディならば,  $\exists n \in \mathbb{N}, B_X(z) = B_{B^n(r)}(z) (\Re z > -n - 2) \implies X \cong B^n(r)$
- (2)  $X$  が  $C^3$ -級ならば,  $\exists n \in \mathbb{N}, B_X(z) = B_{B^n(r)}(z) (\Re z > -n - 2) \implies X \cong B^n(r)$
- (3)  $X$  が  $C^3$ -級ならば,  $B_X(z) = B_{S^1(r)}(z) (\Re z > -3) \implies X \cong S^1(r)$ .
- (4)  $X$  が  $C^4$ -級で  $\text{codim} X \leq 1$  ならば,  $B_X(z) = B_{S^2(r)}(z) (\Re z > -5) \implies X \cong S^2(r)$ .

**系 8** 定理と同じ条件で, ボール, 円周, および 2次元球面は interpoint distance distribution で特徴付けられる.

## 6 留数と内在的体積

$\mathbb{R}^n$  のコンパクトボディを外側に  $\rho$  だけ膨らませたもの ( $\rho$ -平行体という) の体積を  $\rho$  で級数展開すると,  $n$  次多項式になる (Steiner の公式). この係数は (定数倍を除き) 内在的体積とよばれ, 積分幾何学で重要な量である.  $\text{Vol}(\Omega)$  以外は,  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  の主曲率の基本対称式の積分で与えられ, 最高次の係数はオイラー数である.

“定理” (予想) (準備中)  $n = 2, 3$  の場合は, 内在的体積は留数および相対留数である.

## 参考文献

- [AS] D. Auckly, L. Sadun, *A family of Möbius invariant 2-knot energies*, Geometric Topology (Athens, GA, 1993), Studies in Advanced Math, AMS, 1997.
- [B] J.-L. Brylinski, *The beta function of a knot*. Internat. J. Math. **10** (1999), 415–423.
- [Ca] T. Caelli, *On generating spatial configurations with identical interpoint distance distributions*, in: Combinatorial Mathematics, VII (Proc. Seventh Australian Conf., Univ. Newcastle, Newcastle, 1979), in: Lecture Notes in Math., vol. 829, Springer, Berlin (1980), 69–75.
- [Fed] H. Federer, *Geometric measure theory*. Springer (1969).
- [FHW] M. H. Freedman, Z.-X. He and Z. Wang, *Möbius energy of knots and unknots*. Ann. of Math. **139** (1994), 1–50.
- [FV] E. J. Fuller and M.K. Vemuri. *The Brylinski Beta Function of a Surface*. Geometriae Dedicata **179** (2015), 153–160, doi:10.1007/s10711-015-0071-y.
- [GS] I.M. Gel’fand and G.E. Shilov, *Generalized Functions. Volume I: Properties and Operations*, Academic Press, New York and London, 1967.
- [HR] J. Hansen and M. Reitzner, *Electromagnetic wave propagation and inequalities for moments of chord lengths*, Advances in Applied Probability **36**, No. 4 (2004), 987–995
- [KP] L. Karp and M. Pinsky, *The volume of a small extrinsic ball in a submanifold*, Bull. London Math. Soc., **21** (1989), 87–92.
- [MC] C. L. Mallows and J. M. C. Clark, *Linear-Intercept Distributions Do Not Characterize Plane Sets*. J. Appl. Prob. **7** (1970), 240–244.
- [O1] J. O’Hara, *Energy of a knot*. Topology **30** (1991), 241–247.
- [O2] J. O’Hara, *Characterization of balls by interpoint distance distribution*, arXiv 1707.02405.
- [OS1] J. O’Hara and G. Solanes, *Möbius invariant energies and average linking with circles*, Tohoku Math. J. **67** (2015), 51–82
- [OS2] J. O’Hara and G. Solanes, *Regularized Riesz energies of submanifolds*. preprint, arXiv:1512.07935.
- [San] L.A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison- Wesley Publishing Company, 1976.
- [W] P. Waksman, *Polygons and a conjecture of Blaschke’s*, Adv. Appl. Prob. **17** (1985), 774–793.

E-mail: ohara@math.s.chiba-u.ac.jp