余次元 1 のリーマン部分多様体の内在的特徴付け

阿賀岡 芳夫 (広島大学)[1]

§1 問題提起

リーマン多様体の等長埋め込み問題とは, 与えられた n 次元リーマン多様体 (M^n, g) がどのような次元のユークリッド空間になら等長に埋め込めるかを考察する問題である. ただし, $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, g_0)$ が等長埋め込みであるとは, $\varphi^* g_0 = g$ が成り立つことである. ここに g_0 は $\mathbb{R}^{n+k}$ の標準計量を表す.

この問題に関しては, 既に次のような事実が一般論として知られている. まず, 局所的な結果として

<u>定理</u> (Janet-Cartan, 1926–1927)

(M^n, g) は実解析的とする. このとき任意の点 $p \in M^n$ に対して p を含む M^n のある開近傍 U と実解析的写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ が存在して $\varphi^* g_0 = g$ が成り立つ.

局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を使って条件 $\varphi^* g_0 = g$ を書き直すと

$$\sum_{p=1}^{n+k} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x_j} = g_{ij}$$

となる. ただし, $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^{n+k})$ で $i, j = 1, \cdots, n$. 未知関数の個数は $n + k$ 個であり, 一方で方程式の個数は $\frac{1}{2}n(n+1)$ だから, $n + k = \frac{1}{2}n(n+1)$ のときに (局所) 解をもつであろうと考えるのが自然であり, 上記の定理はそれが実解析的のとき成り立つことを主張している.

大域的な結果としては, 次の定理がある.

<u>定理</u> (Nash, 1956) (M^n, g) は C^r 級 $(3 \leq r \leq \infty)$ とする.

(1) M^n がコンパクトなら $\frac{1}{2}n(3n + 11)$ 次元のユークリッド空間に等長に埋め込める.

(2) M^n が非コンパクトなら $\frac{1}{2}n(n + 1)(3n + 11)$ 次元のユークリッド空間に等長に埋め込める.

大域埋め込み可能な次元の評価については, その後の研究によって改善されている. 相当明確な結論が得られているといってよい. このような状況において次に考えるべき問題としては,

[1]橋永 貴弘氏 (北九州高専) との共同研究

- 個別論：特定のリーマン多様体について, 等長埋め込み可能な最小次元を求める (局所的, 大域的両方について)
- 余次元を固定して考察する：例えば, 低余次元に等長埋め込み可能なリーマン多様体の特徴付け (局所的, 大域的両方について)

といったものが自然に浮かぶであろう. この講演では, 後者の問題について, 余次元 1 の局所等長埋め込みの場合に得られた結果について紹介する.

この問題に関しては, 次の定理がよく知られている. (毎度断ることはしないが, 以下ここでは局所的な問題のみを扱うので M^n という記号を使っていても, それはある一点の十分小さな (連結かつ単連結な) 近傍を表していると思って頂きたい.)

定理 (超曲面論の基本定理)

局所等長埋め込み $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ が存在する

$\Longleftrightarrow$ 次の 2 条件を満たす 2 次の対称テンソル場 h_{ij} が存在する.

(i) $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ ：ガウス方程式

(ii) $(\nabla_i h)_{jk} = (\nabla_j h)_{ik}$ ：コダッチ方程式

注意： コダッチ方程式は h に関する 1 階の偏微分方程式. また, $(\nabla_i h)_{jk} = (\nabla_i h)_{kj}$ は常に成立している.

この定理により, ガウス・コダッチ方程式を満たす h をもし見つけることができれば, 等長埋め込みの存在が示せたことになる. しかし, コダッチ方程式を満たす h が存在しないことを示すことは一般に難しい. つまり, この定理を使って等長埋め込みの非存在性を示すことは難しい. そこで次のような問題が自然に考えられる：

問題： 局所等長埋め込みが存在するための必要十分条件を, (M^n, g) の内在的な量 (曲率やその共変微分) に関する条件として表せ.

§2 主結果

まず知られている結果をいくつか紹介する.

定理 (Thomas, 1936)

(M^n, g) のタイプ数 ≥ 4 (従って $n \geq 4$) のとき, 対称 2 次テンソル場 h が M^n の各点でガウス方程式を満たすならば, h はコダッチ方程式を満たす.

注意：タイプ数は (M^n, g) の内在的な量. (詳しくは [4; p.42, 46] を参照.) また, $n \geq 4$ のとき, generic なリーマン多様体は各点でタイプ数 ≥ 4 となるので, この仮定は強い仮定

ではない.

$n \geq 4$ のとき, ガウス方程式が解をもつための内在的条件は既に知られている. 従って $n \geq 4$ のとき「**問題**」は (generic なリーマン多様体について) 解決済. その一方で, $n = 3$ のときはタイプ数 ≥ 4 とはなり得ない. つまりこのときはガウス方程式からコダッチ方程式は導かれない. そこでコダッチ方程式に代わる, 新たな追加条件が必要になる. 余次元＝1 の局所等長埋め込み問題は, 実は $n = 3$ のときが一番難しいのである!

これ以降, すべて $n = 3$ と仮定する. また

$$|R| := \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2323} \end{vmatrix}$$

とおく. このとき次の定理が成り立つ.

定理 (Thomas (1936)+Rivertz (1999))

局所等長埋め込み $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在 $\Longrightarrow$ $|R| \geq 0$ ＋リベルツの 6 つの等式が成立.

ここに, リベルツの 6 つの等式とは次の 6 つの等式のことをいう. ただし $S_{ijklm} = (\nabla_m R)_{ijkl}$ とする.

1. $R_{1212}R_{1313}S_{12232} - R_{1212}R_{1323}S_{12132} - R_{1212}R_{1323}S_{12231} + R_{1212}R_{2323}S_{12131}$
$-{R_{1213}}^2S_{12232} + R_{1213}R_{1223}S_{12132} + R_{1213}R_{1223}S_{12231} + R_{1213}R_{1323}S_{12122}$
$-R_{1213}R_{2323}S_{12121} - {R_{1223}}^2S_{12131} - R_{1223}R_{1313}S_{12122} + R_{1223}R_{1323}S_{12121} = 0,$

2. $R_{1212}R_{1313}S_{12233} + R_{1212}R_{1313}S_{13232} - 2R_{1212}R_{1323}S_{13132} + R_{1212}R_{2323}S_{13131}$
$-{R_{1213}}^2S_{12233} - {R_{1213}}^2S_{13232} + 2R_{1213}R_{1223}S_{13132} + 2R_{1213}R_{1323}S_{12123}$
$-{R_{1223}}^2S_{13131} - 2R_{1223}R_{1313}S_{12123} - R_{1313}R_{2323}S_{12121} + {R_{1323}}^2S_{12121} = 0,$

3. $R_{1212}R_{1313}S_{23232} - 2R_{1212}R_{1323}S_{23231} - R_{1212}R_{2323}S_{12133} + R_{1212}R_{2323}S_{13231}$
$-{R_{1213}}^2S_{23232} + 2R_{1213}R_{1223}S_{23231} + 2R_{1213}R_{2323}S_{12123} + {R_{1223}}^2S_{12133}$
$-{R_{1223}}^2S_{13231} - 2R_{1223}R_{1323}S_{12123} - R_{1313}R_{2323}S_{12122} + {R_{1323}}^2S_{12122} = 0,$

4. $R_{1212}R_{1313}S_{13233} - R_{1212}R_{1323}S_{13133} - {R_{1213}}^2S_{13233} + R_{1213}R_{1223}S_{13133}$
$+R_{1213}R_{1323}S_{12133} - R_{1213}R_{1323}S_{13231} + R_{1213}R_{2323}S_{13131} - R_{1223}R_{1313}S_{12133}$
$+R_{1223}R_{1313}S_{13231} - R_{1223}R_{1323}S_{13131} - R_{1313}R_{2323}S_{12131} + {R_{1323}}^2S_{12131} = 0,$

5. $R_{1212}R_{1313}S_{23233} - R_{1212}R_{2323}S_{13133} - {R_{1213}}^2S_{23233} - 2R_{1213}R_{1323}S_{23231}$
$+2R_{1213}R_{2323}S_{13132} + {R_{1223}}^2S_{13133} + 2R_{1223}R_{1313}S_{23231} - 2R_{1223}R_{1323}S_{13132}$
$-R_{1313}R_{2323}S_{12132} - R_{1313}R_{2323}S_{12231} + {R_{1323}}^2S_{12132} + {R_{1323}}^2S_{12231} = 0,$

6. $R_{1212}R_{1323}S_{23233} - R_{1212}R_{2323}S_{13233} - R_{1213}R_{1223}S_{23233} - R_{1213}R_{1323}S_{23232}$
$+R_{1213}R_{2323}S_{12233} + R_{1213}R_{2323}S_{13232} + {R_{1223}}^2S_{13233} + R_{1223}R_{1313}S_{23232}$
$-R_{1223}R_{1323}S_{12233} - R_{1223}R_{1323}S_{13232} - R_{1313}R_{2323}S_{12232} + {R_{1323}}^2S_{12232} = 0.$

我々の主定理は, この主張の逆にあたるものである.

定理 (A-H)

$|R|>0$ ＋リベルツの 6 つの等式が成立 $\Longrightarrow$ 局所等長埋め込み $\varphi: M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在.

$|R|=0$ となる点の近傍でどうなるかは気になるところであるが, かなり微妙な問題である. 埋め込みが存在する場合もあれば, 存在しない場合もある. この定理に関しては, 他にも様々な疑問が自然に湧いてくるであろう. 例えば,

疑問１　この 6 つの式は, そもそも何なのか? 何を表しているのか?

疑問２　このような長い式が本当に必要なのか? もっと短く, 簡潔に条件を表せないのか?

疑問３　どのようにして, このような条件式 (必要条件) を見つけるのか?

疑問４　どのようにして, 十分性を示すのか?

これらの疑問については後で答えることにして, 先に定理の応用を一つ紹介しよう.

§3 定理の応用 (warped product 計量)

3 次元多様体 M^3 上の warped product 計量について考察する. 3 次元の場合は, 次の 2 種類の計量が考えられる.

$$\text{(A)}\quad ds^2 = dx_1{}^2 + f(x_1)^2(Edx_2{}^2 + 2Fdx_2dx_3 + Gdx_3{}^2),$$
$$\text{(B)}\quad ds^2 = Edx_1{}^2 + 2Fdx_1dx_2 + Gdx_2{}^2 + f(x_1,x_2)^2dx_3{}^2.$$

ただし, (x_1,x_2,x_3) は M^3 の座標で, (A) の場合 E, F, G は x_2, x_3 の関数, $f(x_1)>0$ であり, (B) の場合 E, F, G は x_1, x_2 の関数, $f(x_1,x_2)>0$ である.

(A) の場合

定理 (A-H)　 (M^3,g) は実解析的とする.

局所等長埋め込み $\varphi: M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在するならば, 次の (i) または (ii) が成り立つ.

(i) $f(x_1) = ax_1 + b$,

(ii) $Edx_2{}^2 + 2Fdx_2dx_3 + Gdx_3{}^2$ はガウス曲率が K の定曲率空間で, $K \geq f'(x_1)^2$.

逆に, (ii) が成り立つとき,

(ii-1) $K \equiv 0 \Longrightarrow f(x_1)$ は定数関数で, (M^3,g) は 2 つの平坦な空間の直積になる.
従って $\mathbb{R}^3$ へ局所等長埋め込み可能.

(ii-2) K は正の定数, $K > f'(x_1)^2 \Longrightarrow \mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能.

(ii-3) K は正の定数, $K \equiv f'(x_1)^2 \Longrightarrow$

$f(x_1) = \sqrt{K}x_1 + C$ で (M^3, g) は平坦. 従って $\mathbb{R}^3$ へ局所等長埋め込み可能.

注意.
(i) の場合, 埋め込みが存在するか否かは, 今回の判定法では何ともいえない.
(ii) において, ある点で $K = f'(x_1)^2$ だが $K \not\equiv f'(x_1)^2$ となるときについても同様.

証明のアウトライン. まず,

$$|R| = f(x_1)^4 f''(x_1)^2 (K - f'(x_1)^2)(EG - F^2)^2 \geq 0$$

でなくてはならず, またリベルツの条件のうち, 2 番目と 3 番目以外は 0 となる. 2 番目, 3 番目の条件はそれぞれ

$$\begin{aligned} &- f(x_1)^4 f''(x_1)^2 \nabla_1 R_{1212}(EG - F^2) = 0, \\ &- f(x_1)^4 f''(x_1)^2 \nabla_2 R_{1212}(EG - F^2) = 0 \end{aligned}$$

となる. $f(x_1) > 0$, $EG - F^2 > 0$ であることと実解析性より, $f''(x_1) = 0$ または $\nabla R = 0$ が導かれる. 後者の場合, 2 次元だから定曲率となる.

逆に (ii-2) の場合, $K = 1/r^2$ $(r > 0)$ とおくと, 条件は $r^2 f'(x_1)^2 < 1$ となる.

$(x_2, x_3) \mapsto (a(x_2, x_3), b(x_2, x_3), c(x_2, x_3))$ を $E dx_2{}^2 + 2F dx_2 dx_3 + G dx_3{}^2$ から半径 r の球面 $\subset \mathbb{R}^3$ への局所等長埋め込みとする. このとき写像 $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ を

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (p(x_1), f(x_1)a(x_2, x_3), f(x_1)b(x_2, x_3), f(x_1)c(x_2, x_3))$$

で定める. ここに $p(x_1)$ は未知の 1 変数関数. すると φ が局所等長埋め込みとなるための必要十分条件は $p'(x_1)^2 + r^2 f'(x_1)^2 = 1$ であることが分かる. 従って $r^2 f'(x_1)^2 < 1$ ならば, この条件を満たす $p(x_1)$ が存在する. q.e.d.

(B) の場合

この場合も, リベルツの等式は 2 番目, 3 番目以外は 0 になるが, この 2 つの式があまりにも長い式になって処理しきれない. そこで, 次の形の計量に限定して考察する.

$$ds^2 = k(x_1)dx_1{}^2 + l(x_1)^2 dx_2{}^2 + m(x_1)^2 dx_3{}^2.$$

(つまり $F = 0$, E, G, f は x_1 のみの関数とする. $k(x_1)$ のところだけ 2 乗はないことに注意.) $l(x_1) > 0$, $m(x_1) > 0$ が与えられたとき, 局所等長埋め込みが存在するための $k(x_1)$ に関する条件を求める.

定理 (A-H) $l'm'(l'm'' - l''m') \neq 0$ と仮定する.

(1) 局所等長埋め込み $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在するならば $k = A\,l'^2 + B\,m'^2$ の形になる. ただし, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$.

(2) 逆に $k = A\,l'^2 + B\,m'^2$ で, $A > 0$, $B > 0$ ならば局所等長埋め込み $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在する.

証明のアウトライン. この場合, リベルツの条件式は 2 番目以外はすべて 0 で, 2 番目は

$$\begin{aligned}-\tfrac{l^2m^2}{2k^2}\{l'm'(l'm''-l''m')k'' &-(l'^2m'm'''+l'^2m''^2-l'l'''m'^2-l''^2m'^2)k' \\ +2(l'l''m'm'''+l'l''m''^2 &-l'l'''m'm''-l''^2m'm'')k\}=0\end{aligned}$$

となる. これは k に関する 2 階の線形常微分方程式であり, 次のように書き換えられる.

$$-\frac{l^2m^2}{4k^2}\begin{vmatrix} k & l'^2 & m'^2 \\ k' & (l'^2)' & (m'^2)' \\ k'' & (l'^2)'' & (m'^2)'' \end{vmatrix} = 0.$$

このことから $k = A\,l'^2 + B\,m'^2$ と表せることが分かる. このとき

$$|R| = \frac{ABl^2m^2l'^2m'^2}{k^3}(l'm''-l''m')^2$$

となる. 従って $A \geq 0$, $B \geq 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$ でなくてはならない.

逆に, $A > 0$, $B > 0$ のとき $|R| > 0$ となるから, 局所等長埋め込み $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ が存在する. q.e.d.

(B) で $A > 0$, $B > 0$ の場合, 次の φ が具体的な局所等長埋め込みを与えている：

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{A}\,l(x_1)\cos\frac{x_2}{\sqrt{A}},\ \sqrt{A}\,l(x_1)\sin\frac{x_2}{\sqrt{A}},\ \sqrt{B}\,m(x_1)\cos\frac{x_3}{\sqrt{B}},\ \sqrt{B}\,m(x_1)\sin\frac{x_3}{\sqrt{B}}\right).$$

§4 主結果の証明の概要

ガウス方程式の微分から話は出発する. ここからリベルツの 6 つの等式が導かれる. まず $\mathbb{R}^4$ への局所等長埋め込みが存在すると仮定する. $S_{ijklm} = (\nabla_m R)_{ijkl}$ であったが, 更に第二基本形式の微分を $d_{ijk} = (\nabla_k h)_{ij}$ とおくことにする. コダッチ方程式より, これは対称な 3 テンソル場となる. するとガウス方程式とその微分は

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \\ S_{ijklm} &= d_{ikm}h_{jl} + h_{ik}d_{jlm} - d_{ilm}h_{jk} - h_{il}d_{jkm} \end{aligned}$$

となる. 後者を導ガウス方程式と呼ぶことにする. この式 (3 次元の場合は全部で式は 18 個ある) から d_{ijk} の文字を消去すると, S_{ijklm} と h_{ij} に関する式が 6 つ得られる. (ここで

d の添字に関する対称性を使う.)

$$\begin{aligned}
g_1 &= h_{11}S_{12232} - h_{12}S_{12132} - h_{12}S_{12231} + h_{13}S_{12122} + h_{22}S_{12131} - h_{23}S_{12121} = 0,\\
g_2 &= h_{11}S_{13232} + h_{11}S_{12233} - 2h_{12}S_{13132} + 2h_{13}S_{12123} + h_{22}S_{13131} - h_{33}S_{12121} = 0,\\
g_3 &= h_{11}S_{23232} - 2h_{12}S_{23231} + h_{22}S_{13231} - h_{22}S_{12133} + 2h_{23}S_{12123} - h_{33}S_{12122} = 0,\\
g_4 &= h_{11}S_{13233} - h_{12}S_{13133} - h_{13}S_{13231} + h_{13}S_{12133} + h_{23}S_{13131} - h_{33}S_{12131} = 0,\\
g_5 &= h_{11}S_{23233} - 2h_{13}S_{23231} - h_{22}S_{13133} + 2h_{23}S_{13132} - h_{33}S_{12231} - h_{33}S_{12132} = 0,\\
g_6 &= h_{12}S_{23233} - h_{13}S_{23232} - h_{22}S_{13233} + h_{23}S_{13232} + h_{23}S_{12233} - h_{33}S_{12232} = 0.
\end{aligned}$$

次に, $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ の場合のガウス方程式を解く.

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= h_{11}h_{22} - {h_{12}}^2, & R_{1213} &= h_{11}h_{23} - h_{12}h_{13},\\
R_{1223} &= h_{12}h_{23} - h_{13}h_{22}, & R_{1313} &= h_{11}h_{33} - {h_{13}}^2,\\
R_{1323} &= h_{12}h_{33} - h_{13}h_{23}, & R_{2323} &= h_{22}h_{33} - {h_{23}}^2.
\end{aligned}$$

答は ($\varepsilon = \pm 1$ として) 次で与えられる.

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213}\\ R_{1312} & R_{1313}\end{vmatrix}, & h_{12} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1223}\\ R_{1312} & R_{1323}\end{vmatrix},\\
h_{13} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1213} & R_{1223}\\ R_{1313} & R_{1323}\end{vmatrix}, & h_{22} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1223}\\ R_{2312} & R_{2323}\end{vmatrix},\\
h_{23} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1213} & R_{1223}\\ R_{2313} & R_{2323}\end{vmatrix}, & h_{33} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1313} & R_{1323}\\ R_{2313} & R_{2323}\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

ただし, $|R| \neq 0$ (つまり > 0) とする. これを先の $g_1 \sim g_6$ に代入すると, リベルツの 6 つの等式になる. 連続性より, $|R| = 0$ のときもこの 6 つの等式は成り立つ. これが**疑問３**の答. (実は Rivertz は別の方法でこの必要条件を求めている.)

次に十分性を示す. つまり,「$|R| > 0$」+「リベルツの 6 つの等式」の条件が満たされておれば, 局所等長埋め込みが存在することを示す.

まず $|R| > 0$ であるから先の議論によりガウス方程式は解 h_{ij} をもつ. ここで注意しなくてはいけないのは, この h_{ij} は単なるガウス方程式の解であって, 等長埋め込みの第二基本形式ではないことである. (等長埋め込みの存在はまだ分かっていない状況なのだから.) ここで

$$h := \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{vmatrix}$$

とおくと, ガウス方程式より等式 $|R| = |h|^2$ が成立することが分かる. 特に, 仮定より $|h| \neq 0$ となる. この事実を後で使う.

まずガウス方程式 $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ を共変微分する.

$$S_{ijklm} = d_{ikm}h_{jl} + h_{ik}d_{jlm} - d_{ilm}h_{jk} - h_{il}d_{jkm}$$

ここに, $d_{ijk} = (\nabla_k h)_{ij}$ であり, $d_{ijk} = d_{jik}$ ではあるが, 先程注意した通り $d_{ijk} = d_{ikj}$ とは限らない. ここで上記の式を d_{ijk} に関する方程式をみると, これは一意的に解け, 解は

$$d_{ijk} = \frac{\sum h_{ab}h_{cd}S_{pqrst}}{|h|}$$

というかたちに表せる. (仮定より $|h| \neq 0$ であった.) この式を使うと

$$d_{ijk} - d_{ikj} = \frac{\sum h_{ab} \times g_p}{|h|}$$

となることが確認できる. (実際にこの式を書き下せば, 非常に長い式になる!) リベルツの 6 つの等式は, ガウス方程式の解の公式を通じて $g_1 \sim g_6 = 0$ と同値であったから, リベルツの 6 つの等式が成り立てば h_{ij} はコダッチ方程式を満たすことが分かった. 以上が**疑問 4** の答. 話の流れから, これは同時に**疑問 1** の答にもなっているであろう. q.e.d.

疑問 2 に答えるには表現論的な準備が必要なので, ここで詳しく述べることはできないが, 曲率とその共変微分が満たすべき恒等式としてはリベルツの 6 つの等式が一番簡単な (=最も次数の低い) 関係式であることが確認できる.

§5 記号的方法

論理的には以上で話は完結したのであるが, しかし証明の過程において新たな問題が生じることになってしまった. つまり証明のためには, 手計算では処理しきれないような, 長い式が登場せざるを得ないのである!! (どの程度の長さのものを長いと判断するかは人によりまちまちであろうが, 例えばリベルツの 6 つの式は長いと感ずる人は多いのではなかろうか. しかしその一方で, この 6 つの式のもつ重要性は今までの議論で理解して頂けたことと思う.)

実は, この長い式をコンパクトに表示することを可能にする魔法のような道具が知られている. それは古典的不変式論で使われていた「記号的方法」である. 前節で詳細を略した事柄も, この道具を使うとすべて初等的な線形代数学の知識だけで証明できる. ここではその例の 1 つとして, 4 節の最初に述べた事実を記号的方法を使って証明してみよう. つまり

$$S_{ijklm} = d_{ikm}h_{jl} + h_{ik}d_{jlm} - d_{ilm}h_{jk} - h_{il}d_{jkm}$$

から d_{ijk} を消去して

$$g_1 = h_{11}S_{12232} - h_{12}S_{12132} - h_{12}S_{12231} + h_{13}S_{12122} + h_{22}S_{12131} - h_{23}S_{12121} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_6 = h_{12}S_{23233} - h_{13}S_{23232} - h_{22}S_{13233} + h_{23}S_{13232} + h_{23}S_{12233} - h_{33}S_{12232} = 0$$

の 6 つの式が導かれることを示そう．ただし d_{ijk} は対称な 3 テンソル．実際には, 直接 $g_1 \sim g_6$ に S_{ijklm} を代入して 0 になることを確認すればよいだけなので, この事実を手計算で確認することはそれほど難しいことではない. 数学的な証明としてはそれで十分なのであるが, しかしそれだけで話を終わりにすると, 一体自分は何を計算したことになるのか釈然としないものが残るであろう.

ここでかなり大胆な式変形を行う. まず上記 g_1 に現れる添字の個数を数える. すべての項に共通して 1 が 3 回, 2 が 3 回, 3 が 1 回現れていることが分かる. このことは $g_1 \sim g_6$ が表現論的にみて $\{331\}$ 型の共変式であることを暗示している. そこで補助変数 x_1, x_2, x_3 を導入して次のような 2 次式を作る：

$$x_3{}^2 g_1 - x_2 x_3 g_2 + x_1 x_3 g_3 + x_2{}^2 g_4 - x_1 x_2 g_5 + x_1{}^2 g_6.$$

$x_i x_j$ の係数に $g_1 \sim g_6$ があり, この 6 つの式を 1 つの式にまとめて表示したものである. この式は, すべての項において 1，2，3 の添字が 3 回ずつ現れており, $GL(3, \mathbb{R})$ の相対不変式 $\{333\}$ であることが示せる. つまり, この式に $g \in GL(3, \mathbb{R})$ を作用させると $(\det g)^3$ 倍されるだけの変形しか受けないことが分かる. さらにこの式において

$$S_{12132} = S_{12} S_{13} S_2, \quad h_{12} = h_1 h_2$$

といった具合に各項を「記号」の積に分解する. (S_{12}, S_2, h_1 等が記号である. もちろん $S_{ij} = -S_{ji}$ という性質をもつとする.) 例えば

$$x_3{}^2 h_{11} S_{12232} = x_3{}^2 h_1{}^2 S_{12} S_{23} S_2$$

となる. ここで大切なことは, 式を記号に分解しても, それはもとの式に一意的に復元可能であることである. 上式の場合, $S_{12} S_{23} S_2$ の部分について S_{12232} とするか S_{23122} とするか二通りの可能性があるようにみえるかもしれないが, もともとこの両者は同じものであるから問題は生じない. すると, 驚くべきことに上記の相対不変式 $\{333\}$ は

$$\begin{aligned} & x_3{}^2 g_1 - x_2 x_3 g_2 + x_1 x_3 g_3 + x_2{}^2 g_4 - x_1 x_2 g_5 + x_1{}^2 g_6 \\ &= (x_1 S_{23} - x_2 S_{13} + x_3 S_{12})(h_1 S_{23} - h_2 S_{13} + h_3 S_{12}) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と 3 つの式の積に因数分解されてしまうのである. (この式を展開すると, 各項は

$$x_i S_{jk} \times h_l S_{pq} \times x_r h_s S_t = x_i x_r S_{jkpqt} h_{ls}$$

というかたちに復元される.) 長かった 6 つの式が, こんなに簡潔に表示できたのである!

次にこの式に

$$S_{ijklm} = d_{ikm} h_{jl} + h_{ik} d_{jlm} - d_{ilm} h_{jk} - h_{il} d_{jkm}$$

を代入して 0 になることを確認するのであるが, 先にこの式も記号の積に分解しておく.

$$S_{ij}S_{kl}S_m = d_id_kd_mh_jh_l + h_ih_kd_jd_ld_m - d_id_ld_mh_jh_k - h_ih_ld_jd_kd_m$$

というかたちで代入すればよいのだが, この右辺は

$$d_m\begin{vmatrix} h_i & h_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} h_k & h_l \\ d_k & d_l \end{vmatrix}$$

と因数分解されるので, 結局

$$S_{ij} = \begin{vmatrix} h_i & h_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}, \qquad S_m = d_m$$

として代入すれば十分であることが分かる. ただし, このまま $g_1 \sim g_6$ に代入してしまうと, 例えば

$$h_{11}S_{12232} = (h_1h_1)(h_1d_2h_2d_3d_2 + \cdots\cdots)$$

という具合に展開されてしまい, 記号から元の式を復元する際, どの h_i とどの h_j がペアになって式に戻るのかが分からなくなってしまう. それでは困るので, S_{ijklm} の中の h_i には上線をつけて区別することにして, 例えば

$$h_{11}S_{12232} = (h_1h_1)(\overline{h}_1d_2\overline{h}_2d_3d_2 + \cdots\cdots)$$

のようにする. 結局

$$S_{ij} = \begin{vmatrix} \overline{h}_i & \overline{h}_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}, \quad \text{つまり} \quad S_{ijklm} = \begin{vmatrix} \overline{h}_i & \overline{h}_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overline{h}_k & \overline{h}_l \\ d_k & d_l \end{vmatrix}d_m$$

として

$$\begin{aligned} & {x_3}^2g_1 - x_2x_3g_2 + x_1x_3g_3 + {x_2}^2g_4 - x_1x_2g_5 + {x_1}^2g_6 \\ =& (x_1S_{23} - x_2S_{13} + x_3S_{12})(h_1S_{23} - h_2S_{13} + h_3S_{12})\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

に代入する. するとこの式は

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

となる. これが $g_1 \sim g_6$ に $S_{ijklm} = \sum d_{pqr}h_{st}$ を代入した結果である. ではこの式は何故 0 になるのであろうか? 今までの議論から明らかなように, h_{ij} を記号に分解したときに現

れる h_i と, S_{ijklm} を分解したときに現れる $\overline{h}_i$ について, 上線のつけ方を逆にしても記号を式に戻せば同じ式になる. つまり h_i と $\overline{h}_i$ を入れ替えても, 式としては同じものになる. ところが上の 3 つの行列式の積においては h_i と $\overline{h}_i$ を入れ替えると, 行列式の基本的な性質より符号が変わる. 従ってこの式は 0 になるのである.

ここでは記号的方法の威力について一例を提示するにとどめるが, 残された諸々の事実についても同様の方法で証明することができる. 詳細は執筆中の論文 [1] に記す予定.

記号的方法を用いると, 手に負えなくなるような長い式が現れる場面であっても, 式をコンパクトなかたちにまとめて初等的な線形代数の議論だけで証明することが可能になる. 記号的方法は, 証明の過程で長い式が現れざるを得ない代数学・幾何学における様々な問題において威力を発揮するものと期待される.

ただ, 記号的方法が万能であるわけではない. 式であれば文字に数値を代入することができるが, 記号に数値を代入することは許されない. もし記号に数値を代入することが許されるなら, 現実には起こりえないことが起こってしまうのである. 例えば対称テンソル a_{ij} を $a_i a_j$ と記号の積に分解したとしよう. ここで $a_1 = p$, $a_2 = q$ と仮に数値を代入してみる (p, q は数字). すると, $a_{11} = p^2$, $a_{12} = pq$, $a_{22} = q^2$ となり, $a_{11}a_{22} = {a_{12}}^2$ という等式が常に成り立ってしまうのである. 記号はあくまでもただの記号であって, 決して値をとることはない. 式変形の方便とみなすべきものである. (しかし, 案外もっと深い意味があるのかもしれない.)

記号的方法を使えば主定理の証明はできた. だが, リベルツの 6 つの式の値を具体的なリーマン多様体においていかに効率よく計算するかは, 今後の大きな課題である.

参考文献

[1] Y. Agaoka, T. Hashinaga, Intrinsic characterization of 3-dimensional Riemannian submanifolds of $\mathbb{R}^4$, in preparation.

[2] E. Cartan, Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927), 1–7.

[3] M. Janet, Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. Soc. Polon. Math. **5** (1926), 38–43.

[4] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol.II, John Wiley & Sons, 1969.

[5] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.

[6] H. J. Rivertz, On isometric and conformal immersions into Riemannian manifolds, Ph. D. Thesis, Univ. Oslo, 1999.

[7] T. Y. Thomas, Riemann spaces of class one and their characterization, Acta Math. **67** (1936), 169–211.