第二基本形式に関する 2 次の不変多項式から定まる
積分不変量に関する変分問題

秋山梨佳（首都大学東京）

概要

Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる, ある積分不変量の第一変分公式について述べる. 部分多様体の第二基本形式に関する積分不変量は定式化されており, 本研究で考えている, 写像の第二基本形式から定まる積分不変量はこれの拡張版に当たる. さらに, 写像の第二基本形式を成分とする 2 次の不変多項式から定まる積分不変量の族を考えると, 二重エネルギー汎関数が含まれていることがわかる. また, 二重エネルギー汎関数の変分問題, つまり二重調和写像の第一変分/第二変分公式は Jiang により計算された. これを参考に, ある 2 次の不変多項式から定まる積分不変量の第一変分公式を導出した.

1 Riemann 多様体間の写像に対する積分不変量の定義

Howard [1] により部分多様体の第二基本形式に関する積分不変量が定式化された. この定義を踏まえ, 写像の第二基本形式に関する積分不変量を定義することを考える. これより, 2 次の不変多項式から定まる積分不変量の族を考えることができ, ここに二重エネルギー汎関数が含まれていることがわかる.

まず

$$\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ 対称双線形形式 }\}$$

$$G := O(m) \times O(n)$$

とおく. $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ は有限次元のベクトル空間である. ここで G の $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ への作用を

$$(gH)(u, v) := b\,(H(a^{-1}u,\ a^{-1}v)) \qquad {}^\forall g = (a, b) \in G,\ {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ {}^\forall u, v \in \mathbb{R}^m$$

と定義する. この作用は左作用である. ここで $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$ 上の多項式 $\mathcal{P}$ に対し, $\mathcal{P}$ **が** G **不変**であるということを

$$\mathcal{P}(gH) = \mathcal{P}(H) \qquad {}^\forall g \in G,\ {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

が成り立つことと定義する. 以上の設定の下, $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 上の G 不変な多項式 $\mathcal{P}$ を考える.

次に, 写像の第二基本形式を用意する. (M, g_M) と (N, g_N) を Riemann 多様体, $\varphi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ を C^∞ 級写像とする. このとき任意の $x \in M$ に対し φ の微分写像は線形写像で $(d\varphi)_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$ である. これより $(d\varphi)_x \in T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N$ とかけ, これはつまり $d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes \varphi^*TN)$ である. ここで写像 φ の第二基本形式 h は次で定義される.

$$h := \nabla^{T^*M \otimes \varphi^*TN} d\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \varphi^*TN)$$

これより $x \in M$ とすると $h_x : T_xM \times T_xM \to T_{\varphi(x)}N$ とかけ, これは対称双線形な写像である.

任意の $x \in M$ に対し $\{v_i\}_{i=1}^m,\ \{w_\alpha\}_{j=1}^n$ をそれぞれ $T_xM,\ T_{\varphi(x)}N$ の正規直交基底とする. このとき $T_x^*M \odot T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N$ と $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の間に線形同型対応が作れる. これはつまり

$$h_x \in T_x^*M \odot T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N$$

に対し

$$H_x := \left(h_{ij}^{\alpha}\right) \in \mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

を対応させるということである．ここで h_{ij}^{α} は基底をとった時の h_x の成分表示で

$$h_{ij}^{\alpha} := g_N(h_x(v_i, v_j), w_\alpha)$$

である．以上より, $\mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 上の G 不変な多項式 $\mathcal{P}$ に対し

$$\mathcal{P}(h_x) := \mathcal{P}(H_x)$$

と定義する．この定義は正規直交基底 $\{v_i\}$ と $\{w_\alpha\}$ の取り方によらず well-defined である．

定義 1.1. (M, g_M), (N, g_N) を Riemann 多様体, $\varphi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ を C^∞ 級写像とする．このとき写像 φ の第二基本形式に関する不変多項式 $\mathcal{P}$ から定まる積分不変量 $I^{\mathcal{P}}(\varphi)$ を次で定義する．

$$I^{\mathcal{P}}(\varphi) := \int_M \mathcal{P}(h_x)\, d\mu_M(x)$$

上述の定義に従って, 次の 2 次の斉次多項式を考える．$H = \left(h_{ij}^{\alpha}\right) \in \mathrm{II}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ に対し

$$\mathcal{Q}_1(H) := \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} (h_{ij}^{\alpha})^2 = \|H\|^2, \quad \mathcal{Q}_2(H) := \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} h_{ii}^{\alpha} \right)^2 = \|\mathrm{tr} H\|^2$$

とする．これらはそれぞれ G 不変な多項式になっている．まず $\mathcal{Q}_2$ の積分不変量を考えると

$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_2(h_x) d\mu(x) = \int_M \|\mathrm{tr}(h_x)\|^2 d\mu(x) = \int_M \|\tau(x)\|^2 d\mu(x) = 2\, E_2(\varphi)$$

となる．つまり不変多項式 $\mathcal{Q}_2$ による積分不変量 $I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$ は二重エネルギー汎関数 $E_2(\varphi)$ であることがわかる．エネルギー汎関数については次節で説明する．同様に $\mathcal{Q}_1$ による積分不変量を考えその変分問題を考える．

2 Jiang による二重調和写像の第一変分公式

1 節で導入された, 2 次の不変多項式 $\mathcal{Q}_1$ による積分不変量の変分問題を考えたい．そこで $\mathcal{Q}_2$ による積分不変量は二重エネルギー汎関数と一致することがわかったので, 二重エネルギー汎関数の変分問題, つまり二重調和写像の第一変分公式や第二変分公式の導出過程を参考にすることにした．

定義 2.1. M をコンパクト Riemann 多様体, N を Riemann 多様体, $\varphi : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．ここで

$$E_2(\varphi) := \int_M \|\tau(\varphi)\|^2 d\mu(x)$$

と定義し E_2 を**二重エネルギー汎関数**とよぶ．ここで M 上の正規直交枠場 $\{e_i\}$ に対し φ のテンション場を

$$\tau(\varphi) := (\nabla d\varphi)(e_i, e_i) = (\nabla_{e_i} d\varphi)(e_i)$$

と定義する．

定理 2.1 (Jiang [2])**.** $\varphi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ を C^∞ 級写像, $\{\varphi_t\}$ を C^∞ 級 1 径数変分, V を変分ベクトル場とする．このとき以下が成り立つ．

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(\varphi) = 2\int_M \left\langle V, -\overline{\nabla}^* \overline{\nabla} \tau(\varphi) - \sum_i R^N(d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) d\varphi(e_i) \right\rangle d\mu(x)$$

定義 2.2. 上述の状況で, C^∞ 級写像 φ の**二重テンション場** $\tau_2(\varphi)$ を

$$\tau_2(\varphi) := -\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi) - \sum_i R^N(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))d\varphi(e_i)$$

と定義する. ここで $\tau_2(\varphi) = 0$ となるとき写像 φ は**二重調和写像**であるという.

3 主結果

2 節で Jiang による二重エネルギー汎関数つまり不変多項式 $\mathcal{Q}_2$ による積分不変量の第一変分公式の計算をみた. この計算過程を参考にし, 不変多項式 $\mathcal{Q}_1$ による積分不変量の第一変分公式の導出をした.

定理 3.1 ([3])**.** (M, g_M) をコンパクト Riemann 多様体, (N, g_N) を Riemann 多様体, $\varphi : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. また $\{\varphi_t\}$ をベクトル場 V により生成される C^∞ 級変分とし, $x \in M$ の近傍 U 上の枠場 $\{e_i\}$ で x において次の条件 $(*)$ を満たすものをとる.

$$(*)\begin{cases} (e_1)_x, \cdots, (e_m)_x \text{ は } T_xM \text{ の正規直交基底となる.} \\ \left(\nabla_{e_i} e_j\right)_x = 0 \qquad (\, 1 \leq {}^\forall i, j \leq m) \end{cases}$$

このとき φ の積分不変量

$$Q_1(\varphi) = \int_M \|(\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\|^2 d\mu(x)$$

に対し次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q_1(\varphi_t) \\ &= 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle V,\ \left(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}((\widetilde{\nabla}_{e_j} d\varphi)(e_i))\right)_x - \left(R^N(d\varphi(e_j), (\widetilde{\nabla}_{e_i} d\varphi)(e_j))d\varphi(e_i)\right)_{\varphi(x)} \right\rangle d\mu(x) \end{aligned}$$

定理 3.1 より, 積分不変量 Q_1 の Euler-Lagrange 方程式 ;

$$W_x := \sum_{i,j} \left(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}((\widetilde{\nabla}_{e_j} d\varphi)(e_i))\right)_x - \left(R^N(d\varphi(e_j), (\widetilde{\nabla}_{e_i} d\varphi)(e_j))d\varphi(e_i)\right)_{\varphi(x)} = 0$$

が得られた. ここで Q_1 の Euler-Lagrange 方程式を満たす Riemann 多様体間の写像を Q_1 写像とよぶことにする. W_x の式の形より, 第二基本形式が 0 となる全測地的写像は Q_1 写像に含まれることがわかる. ここで, 次のような, 全測地的写像でない Q_1 写像の例が見つかった.

例 3.1 ([3])**.** $a^2 + b^2 = 1$ となるような $a,\ b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, M を Clifford トーラス ;

$$\begin{aligned} M &= S^1(a) \times S^1(b) \\ &= \left\{x = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v) \in \mathbb{R}^4 \mid u, v \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

とする. このとき包含写像 $\varphi : M \to S^3(1)$ が Q_1 写像になるのは

$$a = b = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

のときである. また, φ は全測地的でない調和写像になっている.

参考文献

[1] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces. Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993), no. 509, vi+69 pp.

[2] G. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas. Translated from the Chinese by Hajime Urakawa. Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 209–232.

[3] 秋山梨佳, 第二基本形式に関する 2 次の不変多項式から定まる積分不変量に関する変分問題, 首都大学東京, 修士論文, 2019.