

離散調和写像による曲面の一意化

梶ヶ谷徹 (東京電機大工)*

本稿の内容は, 田中亮吉氏(東北大理)との共同研究 [2] に基づく.

1. 離散調和写像

(M, G) をリーマン計量 G が定義された n 次元コンパクトリーマン多様体, $X = (V, E, m_E)$ を重み付き有限グラフとする. ここで, V は頂点集合, E は辺集合を表し, $m_E : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は E 上の正值関数で, 辺 $e \in E$ とその逆向きの辺 \bar{e} に対しては, $m_E(\bar{e}) = m_E(e)$ を満たすとする. 以降, 各辺 $e \in E$ は閉区間 $[0, 1]$ としばしば同一視する. X から M への区分的に微分可能な写像 $f : X \rightarrow M$ に対し, f の Dirichlet エネルギーを

$$E_G(f) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \|\dot{f}_e\|_G^2 dt$$

と定義する. ここで, $f_e = f|_e : [0, 1] \rightarrow M$ であり, \dot{f}_e はその接ベクトルを表す (一般には, $f(e)$ が退化していても良い). f の無限小変形に対し, Dirichlet エネルギーの停留点となる写像のことを離散調和写像 (**discrete harmonic map**) と呼ぶ. これは古典的な滑らかなリーマン多様体間の調和写像の一つの離散版として, Colin de Verdière [1] や小谷-砂田 [3] により (独立に) 定義されたものであり, この離散調和写像に対して, 滑らかな場合のいくつかの結果の類推が自然な形で成立することが知られている. 例えば, 離散調和写像の存在と一意性に関する次の Eells-Sampson 型定理は基本的である:

定理 1 (Colin de Verdière [1], 小谷-砂田 [3]). (1) 任意の連続写像 $f_0 : X \rightarrow (M, G)$ に対し, そのホモトピー類 $\mathcal{C} = [f_0]$ 内に少なくとも 1 つ離散調和写像 $h_G : X \rightarrow (M, G)$ が存在する. またもし, (M, G) の断面曲率が非正であるなら, h_G の Dirichlet エネルギーは \mathcal{C} 内で最小である. すなわち, $E_G(h_G) = \min_{f \in \mathcal{C}} E_G(f)$ が成り立つ.

(2) (M, G) が平坦トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ならば, 平行移動による同一視を除き, \mathcal{C} 内の離散調和写像は一意的である. また, (M, G) が負の断面曲率を持ち, f_0 が 1 点とも円ともホモトピックでないなら, \mathcal{C} 内の離散調和写像は, 写像として一意に存在する.

平坦トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ への写像の場合を考えるなら, 定理 1 で存在の保証された離散調和写像 $h_G : X \rightarrow T^n$ は, その普遍被覆 \mathbb{R}^n への自然なリフトを考えることにより, ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内への X の周期的な調和実現を与えていると見なすことができる. ここで, この周期性, すなわち \mathbb{R}^n 内の \mathbb{Z}^n -格子 (あるいは T^n 上の平坦計量) の取り方にも任意性があり, 定理 1 によれば, X の \mathbb{R}^n における周期的調和実現は, 各 \mathbb{Z}^n -格子 (あるいは各平坦計量) 毎に存在することに注意する. この意味で, X を \mathbb{R}^n 内に “周期的に” 調和実現する方法は幾通りもあるのだが, 驚くべきことに, この周期性による任意性を考慮に入れてなお Dirichlet エネルギーを最小化する写像が見つかることがある:

定理 2 (小谷-砂田 [3]). n 次元トーラス T^n 上の体積の等しい平坦計量全体の集合を $\mathcal{M}_0(T^n)$ と書く. また連続写像 $f_0 : X \rightarrow T^n$ は, 全射な準同型 $(f_0)_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S)$ を

誘導すると仮定する。このとき、汎関数

$$\mathcal{E} : \mathcal{C} \times \mathcal{M}_0(T^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(f, G) := E_G(f)$$

の最小値に到達する点 (h_0, G_0) が存在する。さらに、そのような点は、 h_0 の平行移動および恒等写像にホモトピックな等長変換による同一視のもと、一意的である。

この定理で得られた離散調和写像 $h_0 : X \rightarrow (T^n, G_0)$ (またはその普遍被覆 \mathbb{R}^n へのリフト) のことを X の標準実現 (standard realization) と呼ぶ。標準実現を与える平坦計量の構成法と関連する幾何学については [3, 4] を参照して頂きたい。

定理 1, 2 を踏まえて、ターゲットが負の断面曲率を持つ場合、より正確に、双曲計量の定義された種数 2 以上の閉曲面への重み付きグラフの埋め込みに対して、双曲版 “標準実現” の存在を問うことは自然な問題であろう (cf. [3, 4])。事実、論文 [2] において、それが存在することを示した:

定理 3 (K.-田中 [2]). S_g を種数 $g (\geq 2)$ の閉曲面とし、 S_g 上の双曲計量 (断面曲率 -1 のリーマン計量) 全体の集合を $\mathcal{M}_{-1}(S_g)$ と書く。また連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ は、全射な準同型 $(f_0)_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S_g)$ を誘導すると仮定する。このとき、汎関数

$$\mathcal{E} : \mathcal{C} \times \mathcal{M}_{-1}(S_g) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(f, G) := E_G(f)$$

の最小値に到達する点 (h_0, G_0) が存在する。さらに、そのような双曲計量は、恒等写像にホモトピックな等長変換による同一視のもと、一意的である。

π_1 -全射性の条件は、例えば、 $f_0 : X \rightarrow S_g$ が S_g を充填 (fill) する場合、すなわち、像 $f_0(X)$ の S_g 内の補集合が開円盤と同相な部分集合の disjoint union となる場合に満たされる (例えば、 S_g の三角形分割により得られるグラフなど)。

定理 3 は、ドメインが滑らかなリーマン多様体の場合の山田の結果 [5, 6] の離散版と言えるもので、実際、証明は [5] の議論の離散アナロジー、および閉測地線の長さに関する同様の汎関数の凸性を扱った Wolf [7] の議論の拡張に相当するものになっている (この証明はトーラスの場合の小谷-砂田 [3] とは異なる)。証明のあらすじを簡単に述べると次のようになる: 定理 1 により、各双曲計量 G 毎に離散調和写像 $h_G : X \rightarrow (S_g, G)$ が一意的に存在し、かつ h_G は G を固定した際に \mathcal{C} 内でエネルギー最小であるから、この $\{h_G\}_{G \in \mathcal{M}_{-1}(S_g)}$ のエネルギーを評価すれば十分である。一方で、任意の $\varphi \in \text{Diff}_0(S_g)$ に対して、 $\mathcal{E}(\varphi^{-1} \circ h_G, \varphi^*G) = \mathcal{E}(h_G, G)$ だから、結局問題は、次の汎関数

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}} : \mathcal{T}(S_g) = \mathcal{M}_{-1}(S_g)/\text{Diff}_0(S_g) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{C}}([G]) := E_G(h_G)$$

の最小値を見つけることに帰着される。ここで、 $\mathcal{T}(S_g) = \mathcal{M}_{-1}(S_g)/\text{Diff}_0(S_g)$ は S_g のタイヒミュラー空間に他ならない。重要なことは、このタイヒミュラー空間上の汎関数 $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ が、(π_1 -全射性の仮定のもと) proper かつ $\mathcal{T}(S_g)$ 上の Weil-Petersson 測地線に関して狭義凸性を持つことを示すことができるということである。これらの事実と $\mathcal{T}(S_g)$ の任意の 2 点は Weil-Petersson 測地線で結ぶことができるという Wolpert の結果を合わせれば、 $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ の一意的な minimizer $[G_0]$ の存在が従う。

2. 具体例

定理 3 はあくまで存在 (と一意性) 定理であって、与えられた重み付き有限グラフ X とその連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ に対して、定理 3 の汎関数 \mathcal{E} の最小値を達成する最適双曲計量

G_0 とその調和写像を具体的に構成することは、トーラスの場合に比べて、一般にそれほど簡単ではない(トーラスの場合は [4] を参照). しかしながら、いくつかの例が自然にあるグラフの最適計量を与えるということを示すことができる. 最適性を見るのに、最適計量 G_0 の以下の性質は有用である:

定理 4 ([2]). 定理 3 と同じ仮定のもと、連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ のホモトピー類 \mathcal{C} に対して、

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g) := \{[\varphi] \in \text{Mod}(S_g) : \varphi \circ f_0 \sim f_0 \circ \sigma \text{ for some } \sigma \in \text{Aut}(X)\}$$

と定める. ここで、 $\text{Mod}(S_g)$ は閉曲面 S_g の写像類群、 \sim はホモトピックの意味である. このとき、 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は $\text{Mod}(S_g)$ の有限部分群であり、 \mathcal{C} にのみ依存して定まる. さらにもし、 G_0 が定理 3 の汎関数 \mathcal{E} の最小値を達成する双曲計量ならば、 G_0 の等長変換群 $\text{Isom}(S_g, G_0)$ の部分群 \mathcal{G}_0 であって、自然な対応 $\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$, $\varphi \rightarrow [\varphi]$ が群同型となるものが存在する. さらに、 $h_0 : X \rightarrow (S_g, G_0)$ を G_0 に関する一意的な調和写像とすると、任意の $\varphi \in \mathcal{G}_0$ に対して、ある $\sigma_{[\varphi]} \in \text{Aut}(X)$ が存在して、 $\varphi \circ h_0 = h_0 \circ \sigma_{[\varphi]}$ が成り立つ.

この定理は、Nielsen realization problem の改良版である. ここで、有限群 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は計量とは無関係に定義されていることに注意する. $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は一般には空集合となり得るが、 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ の位数が大きい場合には、これが最適計量の等長変換として実現されると言うことから、最適双曲計量の「形」に制約を与える.

例 5. 種数 2 の双曲閉曲面 (S_2, G) は二つの pair of pants $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の貼り合わせにより得られる. 今さらに各 \mathcal{P}_i を二つの双曲直角六角形 $\mathcal{H}_i, \overline{\mathcal{H}}_i$ に分解する. このとき、六角形の貼り合わせによりできる辺、およびそれらの辺の交点をグラフの辺および頂点と見ることによって S_2 に埋め込まれたグラフが得られる (図 1 を参照). 簡単のためグラフの重みを全て 1 として重み付き有限グラフ X を取り、この埋め込みを $f_0 : X \rightarrow S_2$ とする. 作り方から、 f_0 は G に関する X の調和写像 h_G になっている. 問題は、この f_0 に対する定理 3 の意味での最適双曲計量 G_0 は何か? ということである.

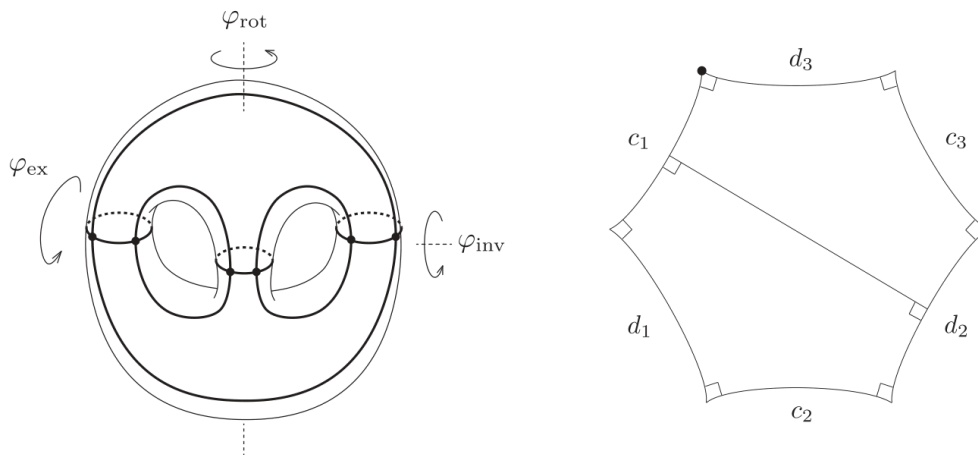


図 1: S_2 の直角六角形による分割 (左) と一つの直角六角形 (右).

まず、簡単な考察から、この f_0 に対する $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_2)$ の元が少なくとも 3 種類見つかる. すなわち、 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の 3 つの境界を巡回的に他の境界に移す曲面の回転 φ_{rot} 、 \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 を入れ替える φ_{inv} 、六角形 \mathcal{H}_i と $\overline{\mathcal{H}}_i$ を同時に入れ替える φ_{ex} の 3 つである. 今、 (S_2, G_0) を定理 3 の意味での f_0 の最適双曲閉曲面とし、 $h_0 : X \rightarrow (S_2, G_0)$ を G_0 に関する $\mathcal{C} = [f_0]$

内の調和写像とする。このとき、定理4によれば、 $\varphi_{\text{rot}}, \varphi_{\text{inv}}, \varphi_{\text{ex}}$ はすべて、最適双曲計量 G_0 の等長変換として実現され、しかもこの変換で $h_0(X)$ の辺は $h_0(X)$ 上の別の辺に移る。特に、4つの六角形は互いに等長的で、変換により移り合う辺はすべて同じ長さでなければならないことが分かる。つまり、 (S_2, G_0) は、図1において $c_1 = c_2 = c_3 = c$ かつ $d_1 = d_2 = d_3 = d$ となる双曲六角形の等長的なコピーを4つ用意して、同じ長さの辺同士を(等長的に)貼り合わせてできる閉曲面になっていなければならない。これでも、長さ c, d を決める必要がある(実際は c を決めると d は自動的に決まるため、長さ c を決める自由度が残る)が、問題は十分簡約されたことに注意する。実際、この候補となる双曲計量を $G(c, d)$ と書けば、この双曲曲面への X の調和写像 $h_{c,d}$ のエネルギー $\mathcal{E}(h_{c,d}, G(c, d))$ は容易に計算できて、

$$\mathcal{E}(h_{c,d}, G(c, d)) = \frac{3}{2}(c^2 + d^2) \geq 3cd$$

となり、等号成立は $c = d$ のときで、このような c は一意的に決定される。つまり、直角“正”六角形の等長的貼り合わせにより得られる双曲曲面が f_0 に対する最適計量 G_0 を与える。

このパンツ分解によるグラフの埋め込み(調和写像) $f_0 : X \rightarrow S_g$ の構成は一般の種数 g の閉曲面にも容易に拡張できる。一般の場合にも、直角正六角形の等長的貼り合わせにより得られる双曲曲面が f_0 に対する最適計量を与える。この他、三角形充填(triangle tessellation)を持つ閉双曲曲面に対し、その三角形分割の辺と頂点を重み1の重み付きグラフの埋め込みと見たとき、その最適計量は元の双曲計量自身であり、三角形充填そのものが“標準実現”の例となっていることを示すこともできる([2]を参照)。これらのような素朴で自然な例が見つかっている一方で、一般の写像 $f : X \rightarrow S_g$ の最適計量を具体的に決定する問題は現状手がかりが少なく、今後の一つの課題となっている。

参考文献

- [1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface?*, Enseign. Math. (2), 37(3-4):201–212, 1991.
- [2] T. KAJIGAYA AND R. TANAKA, *Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps*, arXiv1905.05427.
- [3] M. KOTANI AND T. SUNADA, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*. Trans. Amer. Math. Soc., 353(1): 1–20, 2001.
- [4] T. SUNADA, *Topological Crystallography. With a view towards discrete geometric analysis*. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 6. Springer, Tokyo, 2013.
- [5] S. YAMADA, *Weil-Petersson convexity of the energy functional on classical and universal Teichmüller spaces*. J. Differential Geom., 51(1):35–96, 1999.
- [6] S. YAMADA, *Local and global aspects of Weil-Petersson geometry*, pages 43–111. Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 19. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.
- [7] M. WOLF. *The Weil-Petersson Hessian of length of Teichmüller space*. J. Differential Geom., 91(1):129–169, 2012.