対蹠集合の連結性と等質性

佐々木　優 (筑波大学数理物質科学研究科数学専攻 D2)

本講演では，コンパクト対称空間の極大対蹠集合が等質であるための十分条件を，対蹠集合に連結性という概念を導入することで構成することができたのでこれを報告する．

1　導入

以下，M をコンパクト対称空間とする．対蹠集合を以下のようにして定義する．

定義 1.1 (対蹠集合)**.**

- M の 2 点 $p, q \in M$ が対蹠的とは，$s_p(q) = q (\Leftrightarrow s_q(p) = p)$ をみたすことをいう．
- M の部分集合 S が対蹠集合であるとは，S の各 2 点が対蹠的であることをいう．
- M の対蹠集合 S が極大対蹠集合であるとは，対蹠集合の包含関係による順序に関して S が極大になることをいう．
- 最大の元の個数を持つ対蹠集合 S を M の大対蹠集合という．大対蹠集合の元の個数を M の 2-number といい $\#_2 M$ とかく．

対蹠集合の概念は Chen-Nagano[1] により導入された．定義から，明らかに大対蹠集合は極大対蹠集合である．しかし，ランク 3 以上の有向実グラスマン多様体など，極大対蹠集合が必ずしも大対蹠集合とは限らないようなコンパクト対称空間も知られている．対蹠集合の等質性を次で定める．

定義 1.2 (対蹠集合の等質性)**.** A を M の対蹠集合とする．M の等長変換群の部分群で A に推移的に作用するものが存在するとき，A を等質であるという．

一般のコンパクト対称空間に関して，極大対蹠集合が等質であるかはわからない．しかしながら，次の 2 つの例が知られている．

例 1.3 (コンパクトリー群)**.** [1]

コンパクトリー群 G には両側不変計量が存在し，この計量により G はコンパクト対称空間となる．G の単位元を含む極大対蹠集合は部分群になることが知られている．したがって，コンパクトリー群 G の任意の極大対蹠集合は等質である．

例 1.4 (対称 R 空間)**.** [7]

(G, K) をコンパクト対称対，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を対応する標準分解とする．このとき，線形イソトロピー表現による軌道 M が $\mathfrak{m}$ の $K-$ 不変内積により対称空間となるとき，M を対称 R 空間という．このとき，K におけるワイル群の軌道 A が M の大対蹠集合になり，かつ M の任意の極大対蹠集合が A と合同になることが知られている．したがって，対称 R 空間 M の任意の極大対蹠集合は等質である．

これら 2 つの例から，一般のコンパクト対称空間に関しても極大対蹠集合の等質性が期待される．本講演では対蹠集合に連結性の概念を導入し，一般の連結コンパクト対称空間の設定の元で，極大対蹠集合が等質になるための十分条件を構成する．

2　準備

以下，考えるコンパクト対称空間 M は連結であるとする．このとき，任意の対蹠的な 2 点に関して，これらを通る閉測地線が必ず存在することに注意する．

また，コンパクト対称空間 M の閉測地線たちの長さ全体の集合は $\mathbb{R}$ の離散部分集合になることがわかる．すなわち，最短の長さの閉測地線が存在する．これを単に最短閉測地線と呼ぶことにする．

これらを用いて，対蹠的な 2 点および対蹠集合の連結性を導入する．

定義 2.1 (対蹠集合の連結性)．[8]

- M 上の対蹠的な 2 点 $p, q(p \neq q)$ について，p, q を通る M の最短閉測地線が存在するとき p, q は連結であるという．
- M 上の対蹠集合 A が連結であるとは次をみたすことをいう．
  任意の 2 点 $p, q \in A$ に対して A 上の点列 $p_1, \cdots, p_{l-1}$ で，$p_0 = p, p_l = q$ としたとき $p_i, p_{i+1}(0 \leq i \leq l-1)$ が連結であるようなものが存在すること．この点列 $\{p_i\}$ を o, p をつなぐ連結点列ということにする．
- 連結な対蹠集合 A に対して，A を真に含む連結な対蹠集合が存在しないとき A を極大連結という．
- 連結とは限らない対蹠集合 A の連結な部分集合 B について，B を真に含む A の連結な部分集合が存在しないとき B を A の連結成分であるという．

定義から，連結な極大対蹠集合は極大連結である．しかしながら，一般に極大連結な対蹠集合が極大対蹠集合になるとは限らない．

連結な 2 点を含むような対蹠集合に関して，次の命題が成り立つことがわかった．

命題 2.2. [8]

A を M の任意の対蹠集合で連結な 2 点を含むとし，$p, q \in A$ を連結な 2 点とする．このとき，次が成り立つ．

(1) p, q を通る任意の最短閉測地線を含む，全測地的球面 $M_{p,q}$ が存在する．

(2) 各 $s_r(r \in A)$ について不変であるような，p, q を通る M 上の最短閉測地線が存在する．

この命題を用いて，次のように記号を定義する．

定義 2.3. [8]

A を M の対蹠集合とし，$o \in A$ であるとする．

- A_o : o と連結であるような A の点全体．
- $M_{o,p}(p \in A_o)$: $p \in A_o$ に対して命題 2.2 で定まった，o, p を対蹠的な 2 点とする全測地的球面．
- $L(o, p, A)$: 命題 2.2 で定まった $M_{o,p}$ の o, p を通る閉測地線で各 $s_q(q \in A)$ について不変であるもの全体．
- $L(o, A) := \bigcup_{p \in A_o} L(o, p, A)$.

- $L(A) := \bigcup_{o \in A} L(o, A)$.
- $CL(o, p, A)$：$L(o, p, A)$ の各閉測地線の o, p の中点全体.
- $CL(o, A) := \bigcup_{p \in A_o} CL(o, p, A)$.
- $CL(A) := \bigcup_{o \in A} CL(o, A)$.
- $G_{o,A}$：$CL(o, A)$ の各点の点対称で生成される群.
- G_A：$CL(A)$ の各点の点対称で生成される群．とくに，$G_{o,A}$ は G_A の部分集合である.
- G_W：$CL(A)$ の部分集合 W について，W の各点の点対称で生成される G_A の部分群.

対蹠集合 A が連結な 2 点を持つことと，群 $G_A \neq \phi$ であることは同値であることに注意．すなわち，G_A は A が連結な 2 点を持つ限り必ず定義できて，それは非自明な群になる.

3 主結果

ここからは，上記の準備の元で今回得られた結果を述べていく.

補題 3.1. [8]
A を M の対蹠集合とし連結な 2 点をもつとする．このとき，任意の $g \in G_A$ について $A \cup g(A)$ は対蹠集合である.

定理 3.2. [8]
$G_A(A) = \bigcup_{g \in G_A} g(A)$ は対蹠集合である.

証明. 任意の $g, h \in G_A$ に対して $g(A) \cup h(A)$ が対蹠集合になることを示せばよい．しかし，$A \cup g^{-1}h(A)$ が対蹠集合であることは上の補題からわかり，g は M の等長変換でもあるので $g(A) \cup h(A)$ は対蹠集合である.

□

$G_A(A)$ は $A \subset G_A(A)$ をみたす対蹠集合である．これより，極大対蹠集合の定義から次の系が得られる.

系 3.3. [8]
A を連結な極大対蹠集合とする．このとき，$G_A(A) \subset A$ となる.

すなわち，A が連結な極大対蹠集合であるなら群 G_A が A に作用するのである．次に対蹠集合 $G_A(A)$ における部分集合 $G_A(p) (p \in A)$ がどのような対蹠集合になるかをみる.

定理 3.4. [8]
A を連結な 2 点を含む対蹠集合とする．このとき，任意の $p \in A$ に対して $G_A(p)$ は連結な対蹠集合である.

この定理からすぐに次の系が得られる.

系 3.5. [8]
A を連結な対蹠集合とする．このとき，$G_A(A)$ は連結な対蹠集合である.

証明. $A = \{p_1, p_2, \cdots\}$ とすると $G_A(A) = G_A(p_1) \cup G_A(p_2) \cup \cdots = \bigcup_{p \in A} G_W(p)$ である．とくに，$A, G_A(p_1), \cdots$ はそれぞれ連結なので A の連結性から $G_A(A)$ は連結となる.

□

極大連結性の定義からすぐに次の系を得る．

系 3.6. [8]
A を極大連結な対蹠集合とする．このとき，$G_A(A) \subset A$ となる．

したがって，A が極大連結対蹠集合であるなら，群 G_A が A に作用しているのである．そこで，群 G_A が作用する連結対蹠集合 A の性質をみる．

定理 3.7. [8]
A を連結な対蹠集合で $G_A(A) \subset A$ を満たすとする．このとき，任意の $o \in A$ について $G_A(o) = A$ となる．

これより，対蹠集合 A が連結な極大対蹠集合または極大連結対蹠集合であれば，A は群 G_A により等質となる．とくに，A が極大対蹠集合であれば，A が連結 $\Longrightarrow$ A は等質．したがって，極大対蹠集合が連結であるのは等質であるための十分条件である．これが冒頭に述べた十分条件である．

連結でない極大対蹠集合に関して，その等質性を議論するためには連結成分をみる．任意の連結成分が等長変換で移り合えば，その極大対蹠集合は等質である．一方で，等長変換で移り合わなければ等質性はない．

4　有向実グラスマン多様体の極大対蹠集合の等質性の判定

これまでの結果を用いて，ランク 3 以上の有向実グラスマン多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ のすでに知られている極大対蹠集合たちに関して，その連結性・等質性を判定した表を記す．極大対蹠集合の各記号に関しては Tasaki[3][4][5][6] を引用した．

- $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^n)$

n	$3,4$	5	6	$7,8$	$9 \leq n$	
極大対蹠集合	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$	$A(3,2l+1)(l=[\frac{n-1}{2}])$	$B(3,7)$
大対蹠集合	◯	◯	◯	◯	◯	×
連結性	◯	◯	◯	◯	◯	◯
等質性	◯	◯	◯	◯	◯	◯

- $\tilde{G}_4(\mathbb{R}^n)$

n	$4,5$	6	7	$8,9$	10	
極大対蹠集合	$A(4,4)$	$A(4,6)$	$B(4,7)$	$B(4,8)$	$A(4,10)$	$B(4,8)$
大対蹠集合	◯	◯	◯	◯	×	◯
連結性	◯	◯	◯	◯	◯	◯
等質性	◯	◯	◯	◯	◯	◯

n	$11 \leq n$			
極大対蹠集合	$A(4,2[\frac{n}{2}])$	$B(4,7) \sqcup \cdots \sqcup B(4,7)$	$B(4,8) \sqcup \cdots \sqcup B(4,8)$	otherwise
大対蹠集合	◯	×	×	×
連結性	◯	×	×	×
等質性	◯	◯	◯	×

- $\tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{2l}), \tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{2l+1}), \tilde{G}_{2k+1}(\mathbb{R}^{2l+1}), \tilde{G}_{2k+1}(\mathbb{R}^{2l+2})$

	$\tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{2l}), \tilde{G}_{2k}(\mathbb{R}^{2l+1})(l \geq 3k-1)$	$\tilde{G}_{2k+1}(\mathbb{R}^{2l+1}), \tilde{G}_{2k+1}(\mathbb{R}^{2l+2})(k \geq 2)$
極大対蹠集合	$A(2k,2l)$	$A(2k+1,2l+1)$
連結性	◯	◯
等質性	◯	◯

- $\tilde{G}_{4m}(\mathbb{R}^n)$

n	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
極大対蹠集合	$E^+_{v_{8m}}$	$E^+_{v_{8m}}$	$E^+_{v_{8m}}$	$E^+_{v_{8m}}$				
連結性	×	×	×	×				
等質性	×	×	×	×				

- $\tilde{G}_{4m+1}(\mathbb{R}^n)$

n	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
極大対蹠集合			$E_{v_{8m+2}}$	$E_{v_{8m+2}}$	$E_{v_{8m+2}}$	$E^+_{v_{8m+2}}$		
連結性			○	○	○	×		
等質性			○	○	○	×		

- $\tilde{G}_{4m+2}(\mathbb{R}^n)$

n	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
極大対蹠集合					$E_{v_{8m+4}}$	$E_{v_{8m+4}}$	$E^+_{v_{8m+4}}$	
連結性					○	○	×	
等質性					○	○	×	

- $\tilde{G}_{4m+3}(\mathbb{R}^n)$

n	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
極大対蹠集合							$E_{v_{8m+6}}$	$E^+_{v_{8m+6}}$
連結性							○	×
等質性							○	×

参考文献

[1] B.Y.Chen, T.Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308**(1988), 273-297

[2] P.Frankl, N.Tokushige, Uniform eventown problems, Euro.J.Combi, **51**(2016), 280-286

[3] H.Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, International Journal of Mathmatics, **24**(2013), no.8, 135006-1-28

[4] H.Tasaki, Sequences of Maximal Antipodal Sets of Oriented Real Grassmann Manifolds, Real and Complex Submanifolds. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **106**(2014), 515-524

[5] H.Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds,", International Journal of Mathematics **26** no.5 (2015), 1541008-1-12

[6] H.Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds II, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **203**, Y.J. Suh et al. (eds.), "Hermitian-Grassmannian Submanifolds", (2017), 17-26

[7] M.S.Tanaka, H.Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math, **50**(2013), 161-169

[8] Y.Sasaki, Homogeneity of maximal antipodal sets, submitted