

# 絶対単純パラエルミート対称空間内のパラ実形について

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻

杉本恭司

## 1 はじめに

本稿の内容は下川拓哉氏との共同研究に基づく。

$G$  を連結リー群,  $L$  を  $G$  の閉部分群,  $\hat{\sigma}$  を  $G$  の対合的自己同型とする. パラエルミート対称空間は S. Kaneyuki and M. Kozai によって導入された概念で,  $G$ -不変なパラ複素構造  $I$  と, それと両立する  $G$ -不変なパラエルミート計量  $g$  を備えたアフィン対称空間  $(G/L, \hat{\sigma})$  である (cf. [Ka-Koz]). また, パラエルミート対称空間  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  内のパラ実形とは, 今回新たに導入した概念で, それは  $G/L$  上の対合的反パラ正則等長変換の固定点集合の連結成分のことをいう.

パラエルミート対称空間とよく似た空間に, 擬エルミート対称空間がある. 擬エルミート対称空間はエルミート対称空間を一般化した概念であり, それらの重要な部分多様体のクラスに実形と呼ばれるものがある. (擬)エルミート対称空間内の実形については, 多くの研究が行われてきた. 例えば, (擬)エルミート対称空間内の実形は様々な条件の下, 分類がなされた (cf. [Bo], [Le], [Ta]). また, 特にコンパクト型エルミート対称空間の実形は対称  $R$  空間と呼ばれており, パラエルミート対称空間と対称  $R$  空間の間関係が知られている (cf. [Ka-Koz]). 一方で, パラエルミート対称空間上では, 実形に類似するものについて, 未だ導入, 及び研究がされていないようである. そこで, 我々はパラエルミート対称空間内にパラ実形の概念を導入し, ある特定の条件の下, それらを分類した (cf. [Su-Sh]). 本稿では, パラ実形の導入, 及び基本的な性質について述べる.

## 2 パラエルミート対称空間

パラ実形の定義を述べるにあたって, まず全空間となるパラエルミート対称空間の定義を復習する.

**定義 2.1** (cf. [No]). (1)  $G$  を連結リー群,  $L$  を  $G$  の閉部分群,  $\hat{\sigma}$  を  $G$  の対合的自己同型 ( $\neq \text{id}$ ) とする.  $(G/L, \hat{\sigma})$  がアフィン対称空間であるとは,  $(G^{\hat{\sigma}})_0 \subset L \subset G^{\hat{\sigma}}$  が成り立つことをいう. 但し,  $G^{\hat{\sigma}} := \{x \in G \mid \hat{\sigma}(x) = x\}$ ,  $(G^{\hat{\sigma}})_0$  は  $G^{\hat{\sigma}}$  の単位連結成分を表す.

(2)  $(G/L, \hat{\sigma})$  をアフィン対称空間とする. このとき,  $\Sigma(aL) = \hat{\sigma}(a)L$  for  $aL \in G/L$  で定義される写像  $\Sigma$  をアフィン変換とするような  $G/L$  上の  $G$ -不変アフィン接続  $\nabla^1$  が唯一存在する.  $\nabla^1$  を  $(G/L, \hat{\sigma})$  の標準アフィン接続という.

**注意 2.1.**  $(G/L, \hat{\sigma})$  をアフィン対称空間とする.  $G/L$  上に  $G$ -不変擬リーマン計量が存在するとき, そのレビ・チビタ接続は標準アフィン接続に一致する (cf. [No]).

**定義 2.2** (cf. [Ka-Koz]).  $(G/L, \hat{\sigma})$  をアフィン対称空間,  $I$  を  $G/L$  上の  $G$ -不変  $(1, 1)$  型テンソル場,  $g$  を  $G/L$  上の  $G$ -不変擬リーマン計量とする.  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  がパラエルミート対称空間であるとは次の (1) から (4) を満たすことをいう:

- (1)  $I^2 = \text{id}$ ,
- (2)  $\dim T_p^+(G/L) = \dim T_p^-(G/L)$  for  $\forall p \in G/L$ ,
- (3)  $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$  for  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$ ,
- (4)  $g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$  for  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$ ,

但し,  $I_p : T_p(G/L) \rightarrow T_p(G/L)$  の  $\pm 1$  固有空間を  $T_p^\pm(G/L)$  とする.

一般に  $M$  を  $2n$  次元多様体としたとき, 定義 2.2 の (1) から (3) を満たすような  $M$  上の  $(1, 1)$  型テンソル場  $I$  のことを,  $M$  上のパラ複素構造と呼び, パラ複素構造  $I$  に対して, 定義 2.2 の (4) を満たすような  $M$  上の擬リーマン計量  $g$  のことを,  $M$  上のパラエルミート計量と呼ぶ.

**注意 2.2.**  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  をパラエルミート対称空間とする.

- (1) 定義より, パラエルミート対称空間は偶数次元擬リーマン対称空間であり, パラエルミート計量  $g$  はニュートラル計量である.
- (2)  $g$  はパラケーラー計量になる. 即ち,  $\omega(X, Y) := g(X, IY)$  for  $X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$  とすると,  $\omega$  は  $G/L$  上のシンプレクティック形式となる (cf. [Ka-Koz]).

**定義 2.3.** 実単純リー代数  $\mathfrak{g}$  が絶対単純であるとは,  $\mathfrak{g}$  がある複素単純リー代数の実形になっていることをいう. また, リー群  $G$ , 等質空間  $G/L$  が絶対単純であるとは,  $G$  のリー代数が絶対単純であることをいう.

ここで, パラエルミート対称空間の例をあげる. 以下の例において, パラ複素構造  $I$  が  $G$  のリー代数  $\mathfrak{g}$  の元  $Z$  により定義され, パラエルミート計量  $g$  が  $\mathfrak{g}$  のキリング形式から定められていることに注目されたい.

**例 2.1** (一葉双曲面).  $G := SL(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  とし,

$$I_{1,1} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,  $\hat{\sigma} : G \rightarrow G, a \mapsto I_{1,1} a I_{1,1}$  は  $G$  の対合的自己同型で, その固定点集合  $G^{\hat{\sigma}}$  は

$$G^{\hat{\sigma}} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

となる.  $L := G^{\hat{\sigma}}$  とすると,  $(G/L, \hat{\sigma})$  はアフィン対称空間となる (一葉双曲面). このとき, 原点  $o \in G/L$  における接空間  $T_o(G/L)$  は

$$T_o(G/L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y-z \\ y+z & 0 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

である. ここで,  $T_o(G/L) \cong \{X \in \mathfrak{g} \mid \hat{\sigma}_*(X) = -X\} =: \mathfrak{u}$  に注意する. そこで,  $Z := (-1/2)I_{1,1} \in \mathfrak{g}$  とおく

と,  $\text{ad}Z|_{\mathfrak{u}}$  は  $\mathfrak{u}$  の対称的自己同型である.  $I_o := \text{ad}Z|_{\mathfrak{u}}$  とすると, 任意の  $h \in L$  に対して,

$$I_o \circ \text{Ad} h = \text{Ad} h \circ I_o$$

が成り立つので,  $I_o$  は  $G/L$  上の  $G$ -不変パラ複素構造  $I$  へと拡張される.  $X, Y \in \mathfrak{u}$  に対して,  $g_o(X, Y) := 4\text{Tr}(XY)$  とすると,  $g_o(I_o X, Y) + g_o(X, I_o Y) = 0$  が成り立つ. 更に, 任意の  $h \in L$  に対して

$$g_o(\text{Ad} h(X), \text{Ad} h(Y)) = g_o(X, Y)$$

が成り立ち,  $g_o$  は  $G/L$  上の  $G$ -不変パラエルミート計量  $g$  へと拡張される. 以上よりパラエルミート対称空間  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  が構成された.

次に, パラエルミート対称空間の基本的な性質を紹介する. 以降, 絶対単純パラエルミート対称空間を APHS と表すことにする<sup>\*1</sup>. 以下で述べる命題 2.1, 2.2 により, APHS 上の  $G$ -不変パラ複素構造,  $G$ -不変パラエルミート計量の一意性が得られる.

**命題 2.1** (cf. [Ka-Koz], [Koh]).  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を APHS,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー代数とし,  $\theta$  を  $\hat{\sigma}_*$  と可換な  $\mathfrak{g}$  のカルタン対合,  $\mathfrak{g} := \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta$  による  $\mathfrak{g}$  のカルタン分解,  $\mathfrak{g} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  を  $\hat{\sigma}$  による  $\mathfrak{g}$  の  $\pm 1$  固有空間への分解とする. このとき,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{p}$  が成り立ち, 以下を満たす  $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$  が唯一つ存在する:

- (1)  $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ ,
- (2)  $I_o = \text{ad}_{\mathfrak{u}} Z$ ,
- (3)  $\hat{\sigma}_* = \exp \sqrt{-1}\pi \text{ad} Z$ ,
- (4)  $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$ ,
- (5)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = 1$ ,

但し,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$  は  $\mathfrak{l}$  の中心,  $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z), C_G(Z)$  はそれぞれ  $Z$  の中心化代数と中心化群,  $C_G(Z)_0$  は  $C_G(Z)$  の単位連結成分を表す. また,  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  ( $\lambda = 0$  or  $\pm 1$ ) は  $\text{ad} Z$  の  $\lambda$  固有空間を表す.

**注意 2.3.**  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を APHS とする. 命題 2.1 より,  $G/L$  上の  $G$ -不変パラ複素構造で  $g$  と両立するようなものは, 符号  $\pm$  の差を除いて一意であることがわかる.

**命題 2.2** (cf. [Sh-Su]).  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を APHS,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー代数とする. このとき,  $I$  と両立する  $G/L$  上の任意の  $G$ -不変パラエルミート計量は  $\mathfrak{g}$  のキリング形式  $B_{\mathfrak{g}}$  の 0 でない定数倍の  $G$ -不変拡張である.

### 3 パラ実形

**定義 3.1** (cf. [Su-Sh]).  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  をパラエルミート対称空間,  $R$  を  $G/L$  の空でない部分集合とする.  $G/L$  上のある対称的反パラ正則等長変換が存在して, その固定点集合の連結成分の一つと  $R$  が一致しているとき,  $R$  を  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  内のパラ実形という.

<sup>\*1</sup> absolutery simple para-Hermitian symmetric space の略

例 3.1.  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を例 2.1 で構成した APHS とする.  $G$  の対合的自己同型  $\hat{\xi}$  を次で定める:  $a \in G$  に対して

$$\hat{\xi}(a) = J_{1,1} a J_{1,1},$$

但し,

$$J_{1,1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\xi}$  は  $\hat{\xi}(L) = L$  を満たす. これより,  $G/L$  の対合的反パラ正則等長変換  $\Xi$  を次で定義することができる:

$$\Xi(aL) = \hat{\xi}(a)L.$$

このとき,  $\Xi$  の固定点集合  $(G/L)^\Xi$  は,

$$(G/L)^\Xi = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} L \mid x^2 - y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$(G/L)^\Xi$  の連結成分は二つであり, それぞれが  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  内のパラ実形となる.

注意 3.1. 例 3.1 からわかるように, パラエルミート対称空間の対合的反パラ正則等長変換の固定点集合は連結であるとは限らない.

定理 3.1.  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を APHS とし, 更に, 命題 2.1 で述べられている  $Z$  について,  $L = C_G(Z)$ ,  $G$  の中心は自明であるとする.  $R \subset G/L$  に対して, 以下の (1) と (2) は同値:

- (1)  $R$  は原点  $o$  を含む  $G/L$  のパラ実形である.
- (2)  $R$  は原点  $o$  を含む閉連結完備全測地的部分多様体で次を満たす:
  - (i)  $g_p(T_p R, I_p(T_p R)) = \{0\}$  for  $\forall p \in R$ ,
  - (ii)  $\dim R = (1/2)\dim G/L$ ,
  - (iii) 誘導計量が非退化.

命題 3.1 (cf. [Su-Sh]).  $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$  を APHS とし, 更に, 命題 2.1 で述べられている  $Z$  について,  $L = C_G(Z)$ ,  $G$  の中心は自明であるとする. このとき,  $G/L$  内の任意のパラ実形  $R$  は,  $G/L$  内の原点  $o$  を含むパラ実形  $R_o$  にパラ正則相似変換で移りあう.

下川拓哉氏との共同研究により, 双曲軌道型 APHS 内のパラ実形を分類した (cf. [Su-Sh]). この分類は定理 3.1 の (2) の条件を満たすような全測地的部分多様体を分類したことになる.

## 参考文献

- [Bo] N. Boumuki, The classification of real forms of simple irreducible pseudo-Hermitian symmetric spaces, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no.1, 37–88.
- [Ka-Koz] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. **8** (1985), no.1, 81–98.
- [Koh] S. S. Koh, On affine symmetric spaces, Amer. Math. Soc. **119** (1965), 291–309. (2009), no.2, 67–82.

- [Le] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. IV. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **14** (1979), 179–185.
- [No] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 33–65.
- [Sh-Su] T. Shimokawa and K. Sugimoto, On the groups of isometries of simple para-Hermitian symmetric spaces, *Tsukuba J. Math.* **41** (2017), no.1, 21–42.
- [Su-Sh] K. Sugimoto and T. Shimokawa, Classification of para-real forms of absolutely simple para-Hermitian symmetric spaces, in preparation.
- [Ta] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. J.* **36** (1984), 293–314.