12/11

[3] 条件つき極値問題.

$D \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$, $g(x,y) : D \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{条件つき極値問題}}$ $\underbrace{g(x,y)=0}_{\text{条件}}$ の下で $f(x,y)$ の極値を求める.

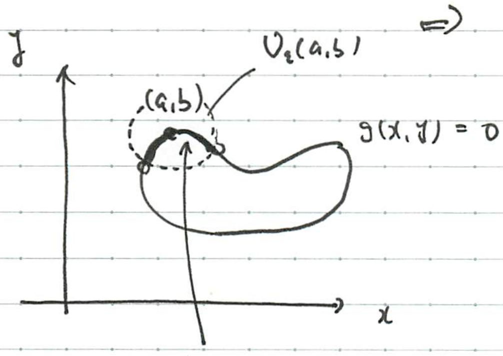
$$\begin{cases} f(x,y) : & \text{目的関数}. \\ g(x,y)=0 : & \text{制約条件}. \end{cases}$$

$\boxed{\text{制約つき最適化問題}}$

定義 (条件つき極値) 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ において極大値 $f(a,b)$ をとる

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $g(a,b)=0$.

(2) $\exists \varepsilon > 0$ $(x,y) \in U_\varepsilon(a,b) \cap D$ かつ $g(x,y)=0$ $\Rightarrow$ $f(x,y) \leq f(a,b)$.



$f(x,y) \leq f(a,b)$

条件付極小値も同様に定義される.
条件付極大値と極小値を合わせて条件つき極値という.

☑

定理 4.20 (Lagrange の未定乗数法) $D \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$, $g(x,y)$: D で C^1 級.
条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ において極値をもつ
$\Rightarrow$ 次のいずれかが成りたつ.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$.

(このとき、点 (a,b) を曲線 $g(x,y)=0$ の特異点という)

(2) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 0 \quad \text{かつ} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0. \end{cases}$ (1)

Proof) 点(a,b)が$g(x,y)=0$の特異点でないと仮定する。
このとき、$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ or $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

そこで、$\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ の場合を考える。

$g(x,y)$はC^1級、かつ$g(a,b)=0$より、陰関数定理(定理4.15)から、$g(x,y)=0$によって定まる陰関数$y=\varphi(x)$で、$b=\varphi(a)$をみたすものが存在する。

$F(x) = f(x, \varphi(x))$ とおくと、$F(x)$はC^1級で$x=a$において極値をもつ。 $\therefore F'(a)=0$.

合成関数の微分法より

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)).$$

かつ陰関数定理より $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

よって

$$F'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

そこで、$\lambda = \boxed{\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}}$ とおくと、式(1)の2つの等式が成り立つ。

($\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ の場合は、$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ であるので、xとyを入れ替えれ陰関数定理を用いて同じ議論をすればよい。)

□

定理 4.20，(2) の拡張：

(2)′ $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

とおくと．

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathcal{L}_x(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathcal{L}_y(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathcal{L}_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$． (2)

(2)

▨ Lagrange の未定乗数法（式(2)）の導出．

もし．$g(x, y) = 0$ より $y = G(x)$ と表すことができれば．$f(x, y) \longrightarrow F(x) = f(x, G(x))$ と．xの1変数関数で表すことが可能になる．

より一般化して．$g(x, y) = 0$ をみたす (x, y) を，パラメータ $(x(t), y(t))$ で表すことができれば．

$f(x, y)$ を $F(t) = f(x(t), y(t))$ と、tの1変数関数で表すことが可能になる．

$f(x, y)$ が $g(x, y) = 0$ の条件の下で $\underbrace{\text{極値をもつ}}_{(x, y) = (a, b)\text{で}}$

$\Rightarrow$ $F(t)$ が $\underbrace{\text{極値をもつ}}_{t = t_0\text{で かつ } (a = x(t_0),\ b = y(t_0))}$

$\Rightarrow$ $F'(t_0) = 0$．

ここで．$F(t)$ は，合成関数の微分を用いると

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t).$$

今，$F'(t_0) = 0$ より

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0) = 0, \quad \cdots (3)$$

式(3)をみたす t_0 を見つけるのは一般に容易ではない．なぜなら．$g(x, y) = 0$ によって定まる陰関数のパラメータ表示 $(x(t), y(t))$ を見つけることは一般に容易ではないからである．

ところが、式(3)を2つのベクトルの内積とみると、

$$\begin{pmatrix} f_x(x(t_0), y(t_0)) \\ f_y(x(t_0), y(t_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

と見ることができる。

ここで、上の2つのベクトルがそれぞれ何者かを確かめよう。

(1) $\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$: $f(x,y)$の勾配ベクトル（ナブラ、グラディエントともいう）という。

grad f, ∇f で表す。（図 p.142）（演 p.135）

$f(x,y)$の点(x,y)における接平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$ を xy平面（$z=0$）に射影したもの。

接平面の勾配（が最も急な）方向を表す。

(2) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$: $g(x,y)=0$の点$(x(t), y(t))$における接線の方向ベクトル。 …(4)

すなわち、$f(x,y)$が$g(x,y)=0$のもとで極値をもつとき、

$\boxed{(f(x,y)\text{の勾配ベクトル}) \perp (g(x,y)\text{の接ベクトル})}$.

さらに、(2)より、$(g(x,y)\text{の接ベクトル}) \perp \nabla g(x,y) = (g_x(x,y), g_y(x,y))$.

Proof.

$g(x(t), y(t)) = G(t)$ とおくと、

$g(x,y)=0$ の解 $(x(t), y(t))$ に対しては常に $G(t)=0$. $\therefore G'(t)=0$.

合成関数の微分より

$$G'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))\,x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))\,y'(t)$$

$$= 0.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \left(- \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} \right)$$

よって、上の(4)の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (5)$$

と表される。

(5) と $\nabla g = \begin{pmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{pmatrix}$ の内積をとると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \end{pmatrix} \cdot \nabla g = g_x(x,y) - g_x(x,y) = 0.$$

$\therefore$ ($g(x,y)$ の接ベクトル) $\perp$ $\nabla g(x,y)$.

—— o —— o —— o ——

よって、$f(x,y)$ が $g(x,y)=0$ の下で極値をもつとき、

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y).}$$

すなわち $\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{pmatrix}$, $g(x,y)=0$. $\cdots$ (6)

よって、$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ とおくと、

式(6)の条件は $\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$ と表され、
これは式(2)を表す。

$\square$

◎ 条件つき最大/最小問題の解法

$f(x,y)$, $g(x,y)$: C^1 級のとき,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$$

が有界閉集合であれば, f は D において最大値, 最小値をもつ. (定理 4.4 (2)) (p.14). これらの値は次の手順でもとめられる.

Step 1 Lagrange の未定乗数法により, p.52 の (2) 式 : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$ をみたす $\underbrace{\text{点}}_{(x_0,\,y_0,\,\lambda_0)}$ をすべて求める.

Step 2 Step 1 で求めた点 (x_0, y_0, λ_0) に対して $f(x_0, y_0)$ を計算し, それらの値の中で最も大きい (小さい) ものが, f の最大値 (最小値).

例題 (図 p.138, 例題 3.17)

$\underbrace{x^2+y^2-1}_{g(x,y)} = 0$ の下で $\underbrace{xy}_{f(x,y)=}$ の最大値, 最小値を求める.

曲線 $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 = 0\}$ は有界閉集合, かつ $f(x,y) = xy$ は C において連続. ゆえに $f(x,y)$ は曲線 C 上で最大値, 最小値をもつ.

Step 1 $g(x,y) = x^2+y^2-1$ について,
$g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$.

$g_x(x,y) = g_y(x,y) = 0$ をみたす $\underbrace{\text{点}}_{(\text{特異点})}$ は $(0,0)$

だが, $(0,0)$ は曲線 C 上にはないため, C は特異点をもたない.

$$
\begin{aligned}
L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\
&= xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$
\begin{cases}
L_x(x, y, \lambda) = y - 2\lambda x. \\
L_y(x, y, \lambda) = x - 2\lambda y. \\
L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.
\end{cases}
$$

よって、最大値または最小値をとる点の座標を (a, b) とおくと、

$$
\begin{cases}
L_x(a, b, \lambda) = b - 2\lambda a = 0 & \cdots ① \\
L_y(a, b, \lambda) = a - 2\lambda b = 0 & \cdots ② \\
L_\lambda(a, b, \lambda) = a^2 + b^2 - 1 = 0 & \cdots ③
\end{cases}
$$

をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。

① より $b = 2\lambda a$, ② より $a = 2\lambda b$,
これらを ③ に代入すると

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 1 &= (2\lambda b)^2 + (2\lambda a)^2 - 1 \\
&= 4\lambda^2 \underbrace{(a^2 + b^2)}_{=1} - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

$a^2 + b^2 = 1$ より $4\lambda^2 = 1$. $\therefore \lambda = \pm\frac{1}{2}$.

① に λ を代入すると $b = \pm a$ となる。
これを再び ③ に代入すると

$$
(a, b) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{複号任意})
$$

となる。

<u>Step 2</u> 上の4点における f の値は

$$
f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \quad (\text{複号同順}).
$$

ゆえに最大値は $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき $\frac{1}{2}$, 最小値は $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき $-\frac{1}{2}$ (いずれも複号同順). ☑