NO. 11
DATE 4 18 2013

4/26

では、どんなベクトルであれば、任意の平面ベクトル

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を線形結合で表すことができるか？

（すなわち、$\mathbb{R}^2$ を張ることができるか？）

さらに、どんなベクトルであれば、任意の平面ベクトルを線形結合で一意的に表すことができるか？

ということを考える。

$\boxed{\text{一意的}}$ … 数学では重要な概念の一つ。
unique

- 連立方程式の解はただ一つ存在するか？
  無数に 〃 ？
  存在しないか？

⇒ 数学で対象の対象としているものの構造を見極める上で重要な性質の一つ。

そこで、与えられたベクトル $a_1, \dots, a_n$ に対し、任意の平面ベクトル が $a_1, \dots, a_n$ の線形結合で一意的に表されるための条件を考えよう。

たとえば、$a_1, \dots, a_n$ の線形結合で

$$x_1 = c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n, \quad \cdots ①$$

$$x_2 = d_1 a_1 + \cdots + d_n a_n \quad \cdots ②$$

と表されたとしよう。
もしこの表示が $\boxed{\text{一意的}}$ ならば、次の (1a), (1b) が成り立つはずである。

(1a)

$$x_1 = x_2 \Rightarrow c_1 = d_1, \ \dots, \ c_n = d_n.$$

∵ もし $x_1 = x_2$ なのに $c_i \neq d_i$ なる i が存在すれば、
x_1 (と x_2) を $a_1, \dots, a_n$ の線形結合で表す表現は一意的でない (少なくとも2通り存在する) ことになる.

(1b)

ある i $(1 \leq i \leq n)$ に対して $c_i \neq d_i \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

∵ もし $c_i \neq d_i$ なのに $x_1 = x_2$ ならば.
(以下同文)

次に、式①から式②を両辺引くと

$$x_1 - x_2 = (c_1 - d_1) a_1 + \cdots + (c_n - d_n) a_n \quad \cdots ③$$

が得られる.

このとき、(1a) から (2a) が、(1b) から (2b) がそれぞれ成り立つ

(2a) $x_1 - x_2 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 - d_1 = 0, \ \dots, \ c_n - d_n = 0$.

(2b) ある i に対して $c_i - d_i \neq 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq \mathbf{0}$.

さらに、$x_1 - x_2$ を x とおき、$c_i - d_i$ を b_i とおくと. (2a) から (3a) が、(2b) から (3b) がそれぞれ成り立つ.

(3a) $x = \mathbf{0}$, すなわち ③式より $b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0.$$

(3b) あるiに対して $b_i \neq 0 \Rightarrow x = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \neq \mathbf{0}$

これが、任意の平面ベクトル x に対して成り立つ.

以上をまとめると.

命題

任意の平面ベクトル $\mathbf{x}$ が、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で一意的に表されるならば、次が成り立つ.

$$b_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + b_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0. \quad \cdots (※)$$

□

式(※)の条件を<u>線形独立</u>または<u>1次独立</u>という.

定義 (線形独立, 1次独立)

平面ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が <u>線形独立</u> or <u>1次独立</u>

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad b_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + b_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0.$$

□

よって、その上の命題は以下のように書ける.

命題 任意の平面ベクトル $\mathbf{x}$ が $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で一意的に表されるならば、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立である. □

定義 (線形従属, 1次従属)

平面ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が線形独立でないとき、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は <u>線形従属</u> or <u>1次従属</u> という. □

さて、教科書 p.4. l.12 ff には、以下のように書かれている.

「以上の考察から、ベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ による線形結合で表すとき、その表し方が一意的である<u>必要十分条件は</u>、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が線形独立であることがわかる.」

ということは、上の命題の逆も示せるはずですよね?

KOKUYO

命題 ベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ が線形独立ならば，任意の平面ベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で一意的に表される．

Proof $\mathbf{x}$ を $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で次の2通りの形に表したとしよう．

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n . \quad \cdots ①$$
$$\mathbf{x} = d_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + d_n \mathbf{a}_n . \quad \cdots ②$$

式①から式②を両辺引くと．

$$\mathbf{0} = (c_1 - d_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{a}_n$$

を得る．ところが $\underbrace{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n}^{\text{仮定より}}$ は線形独立であるので．

$c_1 - d_1 = 0, \cdots, c_n - d_n = 0$ でなければならない．
$\therefore \ c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$．

すなわち．$\mathbf{x}$ を $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で表す表し方はただ一通りのみである．よって命題が示された． ▨

定義（基底）

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が線形独立で．かつ $\mathbb{R}^2$ を張るとき，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の<u>基底</u>という． ▨

命題 ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底
$\iff$ 任意の平面ベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の線形結合として一意的に表される． ▨

§1.2. 平面ベクトルの幾何的な意味.　(p.8, l.3より)

(iii) ベクトルの内積.

定義 (内積)

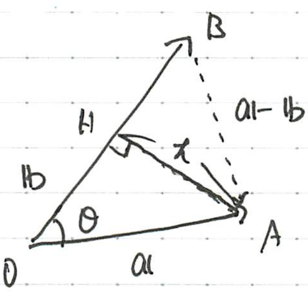
平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し,

$a_1 b_1 + a_2 b_2$ を $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ と内積といい, $(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ で表す. □

命題 平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角度を

θ とする. このとき, $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \|\mathbb{a}\| \, \|\mathbb{b}\| \cos\theta$ が成り立つ.

Proof



(教科書 p.8, 図1.7)

$\mathbb{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき $\overrightarrow{BA} = \mathbb{a} - \mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$.

図で点Aから直線OBへの垂線の足: H,
$\overline{OH}$ の長さ: h とすると, 三平方の定理より

$\triangle OAH$: $\overline{OH} = \|\mathbb{a}\| \cos\theta$ より

$$h^2 + (\|\mathbb{a}\| \cos\theta)^2 = \|\mathbb{a}\|^2 \quad \cdots ①$$

$\triangle BAH$: $\overline{BH} = (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\| \cos\theta)$ より

$$h^2 + (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\| \cos\theta)^2 = \|\mathbb{a} - \mathbb{b}\|^2 . \quad \cdots ②$$

① より $h^2 = \|\mathbb{a}\|^2 - (\|\mathbb{a}\|^2 \cos^2\theta)$ $\cdots ③$

③ を ② に代入すると