## §1.2. 平面ベクトルの幾何的な意味. (p.8, l.3より)

⑪ ベクトルの内積.

**定義** (内積)

平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し,

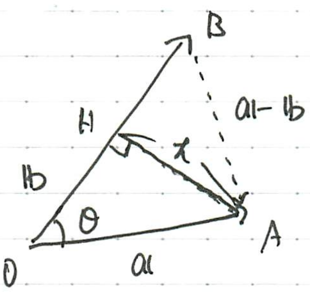
$a_1b_1 + a_2b_2$ を $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ と内積といい、$(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ で表す. $\square$

4/30

**命題** 平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角度を $\theta$ とする. このとき, $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \|\mathbb{a}\| \, \|\mathbb{b}\| \cos\theta$ が成り立つ.

Proof

ひとまず $0 < \theta < \pi/2$ とする.




(教科書 p.8, 図1.7)

$\mathbb{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき $\overrightarrow{BA} = \mathbb{a} - \mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$.

図で点Aから直線OBへの垂線の足 : H,
$\overline{OH}$ の長さ : $h$ とすると, 三平方の定理より

△OAH : $\overline{OH} = \|\mathbb{a}\| \cos\theta$ より

$$h^2 + (\|\mathbb{a}\| \cos\theta)^2 = \|\mathbb{a}\|^2 \quad \cdots ①$$

△BAH : $\overline{BH} = (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\| \cos\theta)$ より

$$h^2 + (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\| \cos\theta)^2 = \|\mathbb{a} - \mathbb{b}\|^2 . \quad \cdots ②$$

① より $h^2 = \|\mathbb{a}\|^2 - (\|\mathbb{a}\|^2 \cos^2\theta)$ $\cdots ③$

③ を ② に代入すると

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta + \|\mathbf{a}\|^2\cos^2\theta) + \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\cos^2\theta$$
$$= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta \quad \cdots ④$$
（余弦定理）

④を $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の各成分を用いて表すと

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 = (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

これを整理して

$$a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 \; 2a_2b_2 + b_2^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

より

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

よって

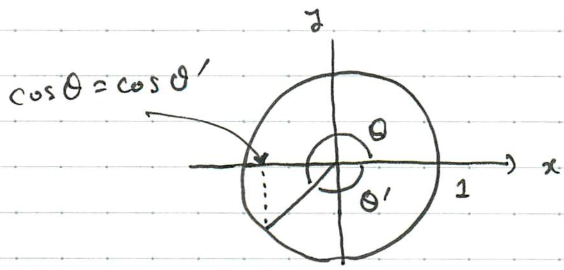
$$\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$$

を得る。これで命題が示された。

注意1. ⇒ 次頁.

注意2. 上の命題において，$\theta$ は $0 \le \theta < \pi$ として一般性を失わない。

$\pi < \theta < 2\pi$ に対し $\theta' = 2\pi - \theta$ とおくと
$$\cos\theta = \cos\theta'.$$




命題 ・平面ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が直交する ⟺ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

・$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2$.

$\theta = 0$,
$\theta = \pi/2$, $\pi/2 < \theta < \pi$, $\theta = \pi$ の場合も上の命題が成り立つ。

**注意 1.**

点 B, H の点 A に一致する。

(1) $\theta = 0$ のとき。

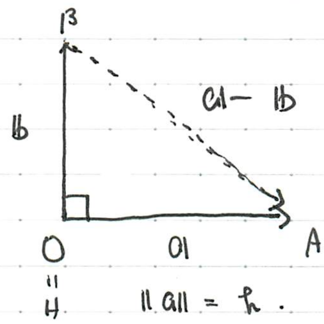
$$O \xrightarrow[\mathbb{a}]{\mathbb{b}} A = B,\quad \mathbb{a} = \mathbb{b}$$

$$\therefore\ \|\mathbb{a} - \mathbb{b}\|^2 = \|\mathbb{0}\|^2 = 0 = (\|\mathbb{a}\| - \|\mathbb{b}\|)^2$$
$$= \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - 2\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta \quad (\theta = 0)$$

より。④式が成り立つ。

(2) $\theta = \pi/2$ のとき。

点 A から直線 OB への垂線の足 H は原点 O に一致する。

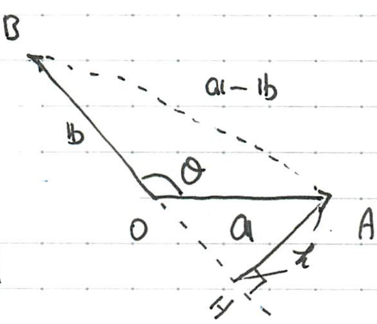



$\|\mathbb{a}\| = h$.

$\therefore$ 三平方の定理より
$$\|\mathbb{a} - \mathbb{b}\|^2 = \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2$$
$$= \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - 2\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta \quad (\theta = \pi/2).$$

より。⑤式が成り立つ。

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき。

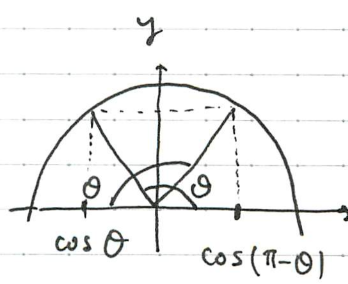



$$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$$

より

$$\triangle OAH:\ |\overline{OH}| = \big|\, \|\mathbb{a}\|\cos(\pi - \theta) \,\big|$$
$$= \|\mathbb{a}\|\cos\theta \quad \text{より}$$

$$h^2 + (\|\mathbb{a}\|\cos\theta)^2 = \|\mathbb{a}\|^2.$$




$y = \theta$ と $y = \pi - \theta$ は y 軸に関して線対称。よって $\cos\theta$ と $\cos(\pi - \theta)$ も同様。

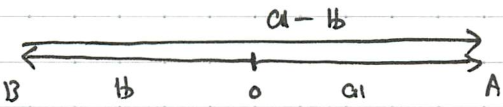
△BAH: $\overline{BH} = (\|\mathbb{b}\| + \|\mathbb{a}\|\cos(\pi-\theta))$

$= (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\|\cos\theta)$ より

$$h^2 + (\|\mathbb{b}\| - \|\mathbb{a}\|\cos\theta)^2 = \|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2.$$

あとはその命題と同様にして ④式が成りたつ.

(4) $\theta=\pi$ のとき.




$$\begin{aligned}\|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2 &= (\|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|)^2 \\ &= \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 + 2\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\| \\ &= \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - 2\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta \\ &\qquad (\theta=\pi)\end{aligned}$$

より ④式が成りたつ.

$\blacksquare$

## §1.3. 複素数

**定義**（虚数単位）

方程式 $x^2+1=0$ の解（すなわち，2乗して $-1$ となる数）を考え，そのうちの1つを　虚数単位　といい，$\sqrt{-1}$ または $i$ で表す．　$\square$

**定義**（複素数）

$a, b \in \mathbb{R}$ のとき，$a+bi$ の形で表される数を <u>複素数</u> という．
複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．すなわち $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$．　$\square$

**定義**（実部，虚部）

複素数 $z = a+bi$ に対し，

$a$：$z$ の実部
$b$：$z$ の虚部
$\Big\}$ という．　$a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$ $\Big\}$ で表す．　$\square$

**定義**（虚数，純虚数）

複素数 $z$ に対し，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ のとき，$z$ を <u>虚数</u> という．
――――――――，$\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ のとき，$z$ を <u>純虚数</u> という．　$\square$

**定義**（複素共役）

複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに <u>複素共役</u>（共役）であるという，

$z = a+bi$ と共役な複素数 $a-bi$ を $\bar{z}$ で表す．

（注意：「共役」は「共軛」の略字なので，「共役」を「キョウエキ」と呼ぶのは誤り．）　$\square$

**定義**（複素数の相等）

$z_1 = a_1+b_1 i$ と $z_2 = a_2+b_2 i$ が等しい $\overset{\text{def}}{\iff}$ $a_1 = a_2$ かつ $b_1 = b_2$．
このとき $z_1 = z_2$ で表す．　$\square$

## 定義（複素平面）

複素数 $z=a+bi$ を $xy$ 平面上の点 $(a,b)$ に対応させて複素数を表したものを 複素平面 という。
（ガウス (Gauss) 平面）

■

**注意** 平面上の点とその位置ベクトルを対応させることにより、複素数全体 $\mathbb{C}$ と平面ベクトル全体 $\mathbb{R}^2$ は 1対1 に対応する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ a+bi & \longleftrightarrow & \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}.$$

■

## 定義（絶対値）

まだ複素数の積を定義していなかった！

複素数 $z=a+bi$ の絶対値: $|z| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

■

**注意** 複素数 $z=a+bi$ の絶対値 $|z|$ は、$z$ に対応する位置ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbf{a}\|$ に等しい。

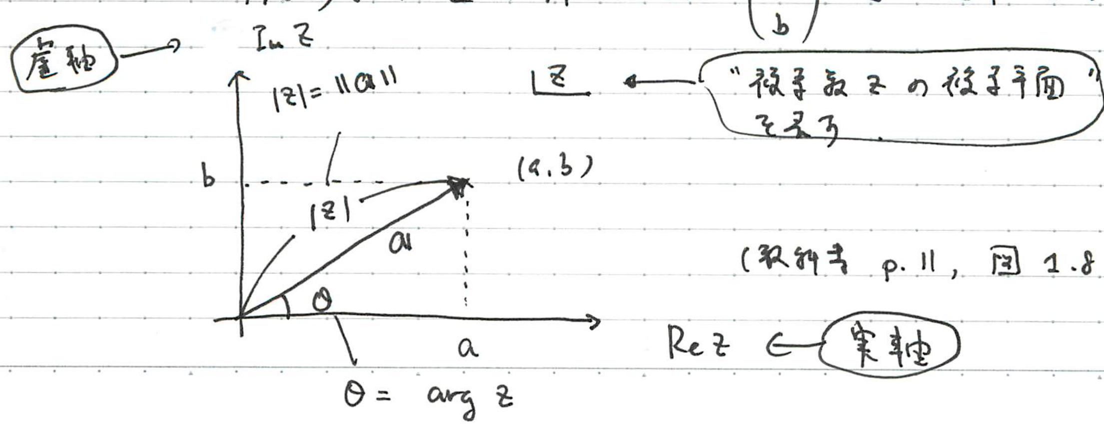
## 定義（偏角）

（"argument" の略）

複素数 $z=a+bi$ の偏角: $\arg z$

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $z$ に対応する位置ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $x$ 軸となす角度 $\theta$.

■




（教科書 p.11, 図 1.8）