定義 (複素平面)

複素数 $z=a+bi$ を xy 平面上の点 (a, b) に対応させて複素数を表したものを複素平面という。
(ガウス (Gauss) 平面)

□

注意 平面上の点とその位置ベクトルを対応させることにより、複素数全体 $\mathbb{C}$ と平面ベクトル全体 $\mathbb{R}^2$ は 1対1 に対応する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ a+bi & \longleftrightarrow & \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

定義 (絶対値)

まだ複素数の積を定義していなかった!

複素数 $z=a+bi$ の絶対値: $|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

□

注意 複素数 $z=a+bi$ の絶対値 $|z|$ は、z に対応する位置ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbb{a}\|$ に等しい。

定義 (偏角)

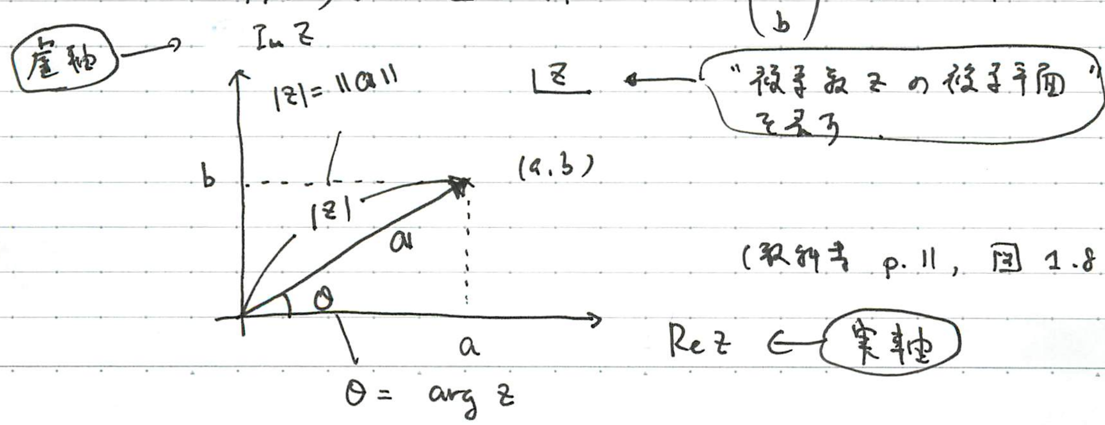
5/10

("argument" の略)

複素数 $z=a+bi$ の偏角: $\arg z$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ z に対応する位置ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が x 軸となす角度 θ.

□



(教科書 p.11, 図 1.8)

◎ 複素数の四則演算（& 幾何的な意味）

加(減)法　$z_1 = a_1 + b_1 i$,　$z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ のとき.

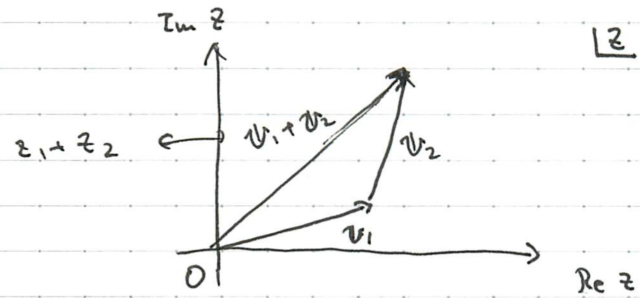
$$z_1 + z_2 \overset{\mathrm{def}}{=} (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

z_1, z_2 に対応する平面ベクトルをそれぞれ

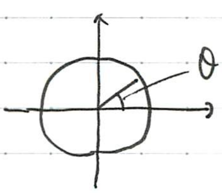
$$z_1 \longleftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad z_2 \longleftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とおくと.　$z_1 + z_2$ は平面ベクトル $v_1 + v_2$ に対応している.

図



arg z は 2π の整数倍を除いて一意的に定まる.



$$\theta = \frac{\pi}{4} \equiv \frac{9}{4}\pi \pmod{2\pi}.$$

（合同式）

2つの値の差は 2π の整数倍

読み方　$\frac{\pi}{4}$ 「合同」 $\frac{9}{4}\pi$ 「モジュロ」 2π.

$z = a + bi$ に対し.　$a = |z| \cos\theta$,　$b = |z| \sin\theta$.
$(0 \leq \theta < 2\pi)$.

$$\therefore \quad z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta).$$

z の極形式 という.

乗法　$z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$\begin{cases} r_1 = |z_1| \\ \theta_1 = \arg z_1 \end{cases}$, $\begin{cases} r_2 = |z_2| \\ \theta_2 = \arg z_2 \end{cases}$ $(0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi)$ のとき.

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

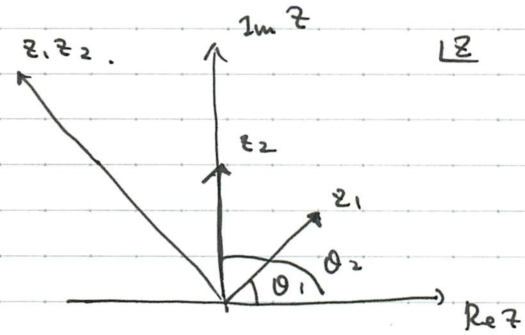
($i^2 = -1$ に注意.)

$z_1 z_2$ を極形式で表すと.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \{ (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) i \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}. \end{aligned}$$

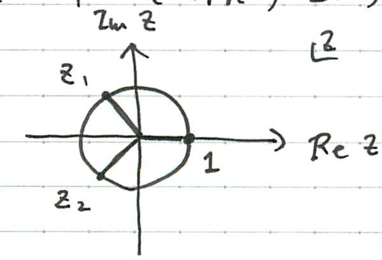
$\therefore$ $\underbrace{|z_1 z_2| = r_1 r_2}_{\text{2つの絶対値の積}}$, $\underbrace{\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2}_{\text{2つの偏角の和}}$.

(例1)　図



(例2)　$x^3 = 1$ をみたす2つの虚数 z_1, z_2 は互いに複素共役.

図



$$\begin{cases} \arg z_1 = \frac{2}{3}\pi. \\ \arg z_2 = \frac{4}{3}\pi. \end{cases}$$

除法　乗法と同じ仮定の下で

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)}$$

↑ 分母, 分子に $a_2-b_2 i$ をかける.

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

$\frac{z_1}{z_2}$ を極形式で表すと.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+ir_1(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\}.$$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1-\theta_2.$$

↑ 絶対値の商.　　　↑ 偏角の差.

定理　(オイラー (Euler) の公式)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad \text{(ただし }\theta\text{は弧度法)}.$$

特に $\theta=\pi$ のとき.

$e^{i\pi}+1=0$ を「オイラーの等式」という. ☐

(加法, 乗法, 指数関数という3つの演算が一度に現われ, かつ加法の単位元 0, 乗法の単位元 1, 円周率 π, 自然対数の底 e, 虚数単位 i が一度に現われることから, 数学における最も美しい定理の一つとされる.)

→ 小川洋子「博士の愛した数式」新潮社も参照.

§1.4. n項数ベクトル

以下では K で実数全体の集合 $\mathbb{R}$ もしくは複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を表す。
(一般には「体」と呼ばれる代数構造をもった集合を表す。)

定義 (n項数ベクトル)

$a_1, \dots, a_n \in K$ に対し、以下を定義する:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad : \text{(}K\text{上の) } n \text{ 項列(縦)ベクトル}$$

$$\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_n) \quad : \text{(}K\text{上の) } n \text{ 項行(横)ベクトル}$$

合わせて <u>n項数ベクトル</u> とよぶが、通常は列ベクトルを数ベクトルと呼ぶ。

$\left\{ \begin{array}{ll} K = \mathbb{R} \text{ のとき} & \text{「実ベクトル」} \\ K = \mathbb{C} \text{ のとき} & \text{「複素ベクトル」} \end{array} \right\}$ と呼ぶこともある。

数ベクトルの全体から成る集合: $K^n \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_1, \dots, a_n \in K \right\}$.

数ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し、a_i を $\mathbf{a}$ の<u>第i成分</u>という。

□

定義 (n項数ベクトルの相等)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in K.$$

このとき

$$\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ は相等しい} \overset{\text{def}}{\iff} n = m \text{ かつ } a_i = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

($\mathbf{a} = \mathbf{b}$ と表す)

$\left(\begin{array}{c} 1 \leq i \leq n \\ \Updownarrow \end{array} \right)$

という書き方もある。

□

定義 (K^n の演算)

$c \in K$, $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in K^n$ とする.

(1) スカラー倍: $c\,\mathbb{a} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$. 特に $(-1)\mathbb{a}$ は $-\mathbb{a}$.

(2) 和: $\mathbb{a} + \mathbb{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$. 特に $\mathbb{a} + (-1)\mathbb{b}$ は $\mathbb{a} - \mathbb{b}$.

命題. 各K^nの数ベクトルの和とスカラー倍について、次の性質が成り立つ.

和 (A1) (結合律) $(\mathbb{a}+\mathbb{b}) + \mathbb{c} = \mathbb{a} + (\mathbb{b} + \mathbb{c})$.

(A2) $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ をゼロベクトルとするとき.

$$\mathbb{a} + \mathbb{0} = \mathbb{0} + \mathbb{a} = \mathbb{a}.$$

(A3) $\forall \mathbb{a} \in K^n$ に対し. $\mathbb{a} + (-\mathbb{a}) = (-\mathbb{a}) + \mathbb{a} = \mathbb{0}$.

(A4) (可換律) $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$.

スカラー倍

(S1) $c(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = c\mathbb{a} + c\mathbb{b}$.

(S2) $(c+d)\mathbb{a} = c\mathbb{a} + d\mathbb{a}$.

(S3) $(cd)\mathbb{a} = c(d\mathbb{a})$

(S4) $1\mathbb{a} = \mathbb{a}$.

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in K^n$, $c, d \in K$.

Proof $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$,

$a_i, b_i, c_i \in K$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ とする.

証明は、すべて各成分の K 上の演算に関する性質に帰着させて示す。

(A1) $$(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c} = \left\{\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}. \quad (1)$$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$ に対し $(a_i+b_i)+c_i = a_i+(b_i+c_i)$.

ゆえに式(1)は以下に等しい。

$$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c}).$$

(A2) $$\mathbb{a}+\mathbb{0} = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}. \quad (2)$$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$ に対し $a_i+0 = 0+a_i = a_i$.

ゆえに式(2)は以下に等しい。

$$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = \mathbb{0}+\mathbb{a} = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = \mathbb{a}.$$

(A3) $$\mathbb{a}+(-\mathbb{a}) = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \quad (3)$$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$ に対し $a_i+(-a_i) = (-a_i)+a_i = 0$.

ゆえに式(3)は以下に等しい。

$$(-1)\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} = (-1)\mathbb{a}+\mathbb{a} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \mathbb{0}.$$

(A4) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ (4)

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $a_i + b_i = b_i + a_i$.
ゆえに式(4)は以下に等しい.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

以下、スカラー倍についても同様にして示される。

(S1) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\left\{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\right\}$

$$= \begin{bmatrix} ca_1 + cb_1 \\ \vdots \\ ca_n + cb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cb_1 \\ \vdots \\ cb_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= c\mathbf{a} + c\mathbf{b}.$$

(S2) $(c+d)\mathbf{a} = \begin{bmatrix} (c+d)\,a_1 \\ \vdots \\ (c+d)\,a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 + da_1 \\ \vdots \\ ca_n + da_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}.$$

(S3) $(cd)\,\mathbf{a} = \begin{bmatrix} (cd)\,a_1 \\ \vdots \\ (cd)\,a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(da_1) \\ \vdots \\ c(da_n) \end{bmatrix}$

$$= c\begin{bmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_n \end{bmatrix} = c(d\mathbf{a}).$$

(S4) $1\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1a_1 \\ \vdots \\ 1a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}.$

定義 (n項基本ベクトル)

$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を n項基本ベクトル とよぶ.

定義 (線形結合)

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r \in K^n$, $c_1, \cdots, c_r \in K$ のとき.

$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r$ も n項数ベクトル.

これを $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$ の 線形結合 または 1次結合 とよぶ.

定義 (n項数ベクトル空間)

和とスカラー倍が定義された n項数ベクトルの集合

$$K^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \; a_1, \cdots, a_n \in K \right\}$$

を, K上(の) n項数ベクトル空間 とよぶ.

- $K = \mathbb{R}$ のとき $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$: 実n項数ベクトル空間.
- $K = \mathbb{C}$ のとき $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^n$: 複素n項数ベクトル空間.

命題 任意のn項数ベクトル $\mathbf{a} \in K^n$ は, 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ の線形結合で表すことができる.

定義 (線形独立、1次独立)

$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r \in K^n$ が (K上) <u>線形独立</u>
or (K上) <u>1次独立</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $c_1, \dots, c_r \in K$ に対し.
$c_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + c_r \mathbb{a}_r = \mathbb{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$

■

定義 (線形従属、1次従属)

$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r \in K^n$ が K上 線形独立でないとき,
$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r$ は <u>線形従属</u> or <u>1次従属</u> という. ■

定理 1.1 (線形結合の一意性の条件)

$K: \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする. このとき, ${}^\forall \mathbb{x} \in K^n$ が $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r \in K^n$ の線形結合で一意的に表されることの必要十分条件は, $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r$ が線形独立であることである.

Proof.

$\mathbb{x}_1 = c_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + c_r \mathbb{a}_r \quad (c_1, \dots, c_r \in K)$,
$\mathbb{x}_2 = d_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + d_r \mathbb{a}_r \quad (d_1, \dots, d_r \in K)$

とする. このとき, 以下が成り立つ.

「${}^\forall \mathbb{x} \in K^n$ が $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r$ の線形結合で一意的に表される」

$\Longleftrightarrow$ 「$\mathbb{x}_1 = \mathbb{x}_2 \Longrightarrow c_1 = d_1, \dots, c_r = d_r$」

$\Longleftrightarrow$ 「$\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2 = \underbrace{\mathbb{0}}_{(c_1-d_1)\mathbb{a}_1 + \cdots + (c_r-d_r)\mathbb{a}_r =} \Longrightarrow c_1 - d_1 = 0, \dots, c_r - d_r = 0$」

(ここで $\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2$ を $\mathbb{x}$ に, $c_i - d_i$ を b_i $(i=1,\dots,r)$ に それぞれ置き換えると)

$\Longleftrightarrow$ 「$\mathbb{x} = \underbrace{\mathbb{0}}_{b_1\mathbb{a}_1 + \cdots + b_r\mathbb{a}_r =} \Longrightarrow b_1 = \cdots = b_r = 0$」

$\Longleftrightarrow$ 「$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_r$ は線形独立」.

より. 定理が示された. ■