5/14

§1.5 行列の演算

§1.5.1 行列の和とスカラー倍

定義 (行列)

$m, n \in \mathbb{N}$

mn 個の数 (スカラー) a_{ij} ($i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$) を

m 行 n 列の長方形に並べたもの

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を m 行 n 列の行列という。

(m, n) 行列、$m \times n$ 行列 ともいう。

a_{ij} を A の (i, j) 成分という。

行列 A の (i, j) 成分が a_{ij} であることを $A = (a_{ij})$ で表す。

K の元を成分にもつ m 行 n 列の行列全体：

$M(m, n; K)$, $M_{m,n}(K)$, $K^{m \times n}$ 等で表す。

$m = n$ の場合は特に

$M(n; K)$, $M_n(K)$, $K^{n \times n}$ 等。

文脈から K が明らかな時は、K を略すこともある。

$M(m, n)$, $M(n)$ 等。

(なお $M_{m,n}(K)$, $K^{m \times n}$ の K は略さない)

$\boxtimes$

定義 (行ベクトル、列ベクトル) $a_i \in K$.

$(1, n)$ 行列 $(a_1, \dots, a_n)$ を n 次の行ベクトルという。

$(1, j)$ 成分 → 第 j 成分。

$(m, 1)$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ を m 次の列ベクトルという。

$(i, 1)$ 成分 → 第 i 成分。

第j列.

$$\begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ a_{i1} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ & a_{mj} & \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{行}$$

(m,n)行列 $A = (a_{ij})$ に対し.

行ベクトル $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ $(i=1,\dots,m)$ を A の第i行ベクトル.

列ベクトル $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(j=1,\dots,n)$ を A の第j列ベクトル という.

定義 (実行列, 複素行列)

(m,n)行列 の成分がすべて $\left\{\begin{array}{l}\text{実数} \longrightarrow \underline{\text{実行列}} \\ \text{複素数} \longrightarrow \underline{\text{複素行列}}\end{array}\right\}$ という. ∎

定義 (零行列)

すべての成分が 0 の (m,n)行列を 零行列 といい,

$O_{m,n}$ または O で表す. ∎

定義 (正方行列)

(n,n)行列を n次(の)正方行列 または n次行列 という.

n次正方行列 $A = (a_{ij})$ の成分 a_{ii} $(i=1,\dots,n)$ を A の対角成分 とよぶ. ∎

定義 (単位行列)

n次正方行列 の すべての 対角成分が 1, 残りのすべての成分が 0 のとき. これを n次単位行列 といい, E_n で表す.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

文脈から n が明らかな場合は E_n を 単に E で表す. ∎

定義 (クロネッカーのデルタ)

$i, j \in \mathbb{N}$ に対し, δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定める. これをクロネッカー(Kronecker)のデルタ(記号)という. ▨

☆ n次単位行列 E_n はクロネッカーのデルタを用いて
$E_n = (\delta_{ij})$ と表すことができる.

定義 (行列の相等)

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が相等しい
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ に対し $a_{ij} = b_{ij}$.
(各成分が等しい)

このとき $A = B$ と表す. ▨

定義 (行列の和)

$A, B \in K^{m \times n}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

のとき, (i, j) 成分が $a_{ij} + b_{ij}$ であるような行列を
A と B の和といい, $A + B$ で表す. すなわち

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

▨

定義（行列のスカラー倍）.

$A \in K^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, $c \in K$ のとき.
(i,j) 成分が ca_{ij} であるような行列を **Aのc倍** といい, cA で表す. すなわち

$$cA = (ca_{ij}).$$

特に $(-1)A$ を $-A$ で表す.
また $A+(-B)$ を $A-B$ で表す. ☒

命題 $A, B, C \in K^{m\times n}$, $c, d \in K$ のとき.
以下が成り立つ.

(1) $A+B = B+A$ （交換法則）.
(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$. （結合法則）.
(3) $A+O = O+A = A$.
(4) $A+(-A) = (-A)+A = O$.
(5) $c(A+B) = cA+cB$.
(6) $(c+d)A = cA+dA$.
(7) $c(dA) = (cd)A$.
(8) $1A = A$.

Proof. n項数ベクトルの和とスカラー倍に関する性質と同様.
すべて行列の各成分のK上の演算に関する性質に帰着させて示す.

(1) $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = B+A$.

(2) $(A+B)+C = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})$
$= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) = A+(B+C)$.

(3) $A+O = (a_{ij}+0) = (0+a_{ij}) = O+A$
$= (a_{ij}) = A$.

(4) $A+(-A) = (a_{ij}+(-a_{ij})) = ((-a_{ij})+a_{ij}) = (-A)+A$
$= (a_{ij}-a_{ij}) = (0) = O$.

(5) $c(A+B) = c(a_{ij}+b_{ij}) = (ca_{ij}+cb_{ij})$
$= cA + cB.$

(6) $(c+d)A = ((c+d)a_{ij}) = (ca_{ij}+da_{ij})$
$= cA + dA.$

(7) $c(dA) = c(da_{ij}) = ((cd)a_{ij}) = (cd)A.$

(8) $1A = (1a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$ ∎

§1.5.2 行列の積.

<u>和の記法</u> $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n.$

別の文字に変えてもよい。たとえば $\sum_{k=1}^{n} a_k.$

$I = \{1, \dots, n\}$ とおいて $\sum_{i \in I} a_i$ とも表す。

この記法は、インデックスが連続した自然数でないような場合に有効。

(例) $I = \{1, 4, 7\}$ のとき、
$= \{j_1, j_2, j_3\}$ と表すと、

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_{j_1} + a_{j_2} + a_{j_3} = \sum_{k=1}^{3} a_{j_k} = \sum_{i \in I} a_i.$$

<u>定義</u> (行列の積) 5/17

$A = (a_{ij})$: (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$: (m, l) 行列.

Aの列数とBの行数が等しいことに注意.

このとき、Aの第i行の成分とBの第j列の成分の積和 (積の和)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$