(5) $c(A+B) = c(a_{ij}+b_{ij}) = (ca_{ij}+cb_{ij})$
$= cA + cB$.

(6) $(c+d)A = ((c+d)a_{ij}) = (ca_{ij}+da_{ij})$
$= cA + dA$.

(7) $c(dA) = c(da_{ij}) = ((cd)a_{ij}) = (cd)A$.

(8) $1A = (1a_{ij}) = (a_{ij}) = A$. ▨

§1.5.2 行列の積.

和の記法 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$.

別の文字 n かえても良い. たとえば $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

$I = \{1, \ldots, n\}$ とおいて $\sum_{i \in I} a_i$ とも表す.

この記法は, インデックス i が連続した自然数でないような場合に有効.

(例) $I = \{1, 4, 7\}$ のとき.
$= \{j_1, j_2, j_3\}$ と表すと.

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_{j_1} + a_{j_2} + a_{j_3} = \sum_{k=1}^{3} a_{j_k} = \sum_{i \in I} a_i.$$

5/17

定義 (行列の積)

$A = (a_{ij})$: (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$: (m, l) 行列.

A の列数と B の行数が等しいことに注意.

このとき, A の第 i 行の成分と B の第 j 列の成分の積和 (積の和)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

を (i,j) 成分とする (m, ℓ) 行列を <u>AとBの積</u> という。
AB で表す。

☆ AB の行数、列数は それぞれ Aの行数 Bの列数 になることに注意。

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} \end{pmatrix}} = \overset{AB}{\begin{pmatrix} \boxed{c_{ij}} \\ \\ \end{pmatrix}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} .$$

<u>注意</u>　$A : (m, n)$ 行列，$B : (k, \ell)$ 行列 とする。

① 積 AB は $n = k$ のときのみ定義可能。
積 BA は $m = \ell$ 〃 〃 。

② AB が定義できても BA が定義できるとは限らない。

③ AB と BA が定義できても $AB = BA$ とは限らない。
（$AB = BA$ が成り立つとき、「AとBは積に関して<u>可換</u>」という。）　交換可能
（可換でないことを「非可換」という。）

☆ 高校までで扱ってきた数学の世界は可換なものがほとんどだったが、一般の数学の世界は非可換なものもたくさんある。可換な世界は当たり前のものではない。

定理 1.2　（行列の積の結合法則）

$$\begin{cases} A = (a_{ij}) : (m,n) \text{ 行列}. \\ B = (b_{ij}) : (n,l) \text{ 行列}. \\ C = (c_{ij}) : (l,r) \text{ 行列}. \end{cases}$$

このとき、行列の積に関して結合法則が成り立つ。すなわち

$$(AB)C = A(BC).$$

Proof のヒント：いきなり (m,n) 行列…などで考えるのが大変…という人は、もう少し手頃な例題を考えるところから始めよう。

A, B, C がすべて $(3,3)$ 行列の場合。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

$(AB)C$ の (i,j) 成分を考える。
AB の (i,k) 成分を $(ab)_{ik}$ で表すと、
$(AB)C$ の (i,j) 成分を $((ab)c)_{ij}$,

$$((ab)c)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} (ab)_{ik} c_{kj} = (ab)_{i1}c_{1j} + (ab)_{i2}c_{2j} + (ab)_{i3}c_{3j}. \quad ①$$

そして、AB の (i,k) 成分 $(ab)_{ik}$ は、

$$(ab)_{ik} = \sum_{l=1}^{3} a_{il} b_{lk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}. \quad ②$$

② と ① の和へ代入すると

$$\begin{aligned} ((ab)c)_{ij} &= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{l=1}^{3} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31}) c_{1j} \\ &\quad + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{i3}b_{32}) c_{2j} \\ &\quad + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33}) c_{3j} \end{aligned}$$

$$= a_{i1}\boxed{b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + b_{13}c_{3j}} + a_{i2}\boxed{b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + b_{23}c_{3j}} + a_{i3}\boxed{b_{31}c_{1j} + b_{32}c_{2j} + b_{33}c_{3j}}$$

(BC) の (k,j) 成分を $(bc)_{kj}$ で表す。

$$\qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\qquad (bc)_{1j} \qquad\qquad (bc)_{2j} \qquad\qquad (bc)_{3j}$$

$$= a_{i1}(bc)_{1j} + a_{i2}(bc)_{2j} + a_{i3}(bc)_{3j}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(bc)_{kj} = a(bc)_{ij}.$$

A(BC) の (i,j) 成分を $a(bc)_{ij}$ で表す。

ゆえに、(AB)C の (i,j) 成分は A(BC) の (i,j) 成分に等しい。よって (AB)C = A(BC).

定理 1.3 (行列の分配法則).

$A = (a_{ij})$: (m, n) 行列.
$B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$: (n, l) 行列.
$D = (d_{ij})$: (l, r) 行列.

このとき、分配法則が成り立つ。すなわち

① $A(B+C) = AB + AC$, ② $(B+C)D = BD + CD$.

注意 行列の積の順序は変えないこと。

Proof のヒント: 定理 1.2 と同様、A, B, C をすべて (3,3) 行列の場合を考えよう。

①
A(B+C) の (i,j) 成分を考える。
を $a(b+c)_{ij}$ で表すと、
B+C の (k,j) 成分は $b_{kj} + c_{kj}$ であるから、

$$a(b+c)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}b_{kj}) + \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}c_{kj})$$

$$= (ab)_{ij} + (ac)_{ij}.$$

(AB)の(i,j)成分.　(AC)の(i,j)成分.

ゆえに $A(B+C)$ の (i,j) 成分は AB の (i,j) 成分と AC の (i,j) の和に等しい. よって $A(B+C) = AB + AC$.

② $(B+C)D$ の (i,j) 成分を $(b+c)d_{ij}$ で表すと.

$B+C$ の (i,k) 成分は $b_{ik} + c_{ik}$ であるから.

$$(b+c)d_{ij} = \sum_{k=1}^{3} (b_{ik} + c_{ik}) d_{kj} = \sum_{k=1}^{3} (b_{ik} d_{kj}) + \sum_{k=1}^{3} (c_{ik} d_{kj})$$

$$= (bd)_{ij} + (cd)_{ij}$$

(BD)の(i,j)成分.　(CD)の(i,j)成分.

ゆえに $(B+C)D$ の (i,j) 成分は BD の (i,j) 成分と CD の (i,j) 成分の和に等しい. よって $(B+C)D = BD + CD$. ▨

注意. 定理1.2, 1.3 とも, 上の証明は 3×3 の場合の例を示したに過ぎないので, 一般の場合については各自でちゃんと示しましょう. ▨