$$= (ab)_{ij} + (ac)_{ij}.$$

(AB)の(i,j)成分.　　(AC)の(i,j)成分.

ゆえに $A(B+C)$ の (i,j) 成分は AB の (i,j) 成分と AC の (i,j) の和に等しい. よって $A(B+C) = AB + AC$.

② $(B+C)D$ の (i,j) 成分を考える. $(b+c)d_{ij}$ で表すと.
$B+C$ の (i,k) 成分は $b_{ik}+c_{ik}$ であるから.

$$(b+c)d_{ij} = \sum_{k=1}^{3}(b_{ik}+c_{ik})d_{kj} = \sum_{k=1}^{3}(b_{ik}d_{kj}) + \sum_{k=1}^{3}(c_{ik}d_{kj})$$

$$= (bd)_{ij} + (cd)_{ij}$$

(BD)の(i,j)成分.　　(CD)の(i,j)成分.

ゆえに $(B+C)D$ の (i,j) 成分は BD の (i,j) 成分と CD の (i,j) 成分の和に等しい. よって $(B+C)D = BD + CD$. ∎

注意. 定理1.2, 1.3 とも, 上の証明は 3×3 の場合の例を示したに過ぎないので, 一般の場合については各自でちゃんと示しましょう. ∎

5/21

§1.5.3 転置行列, 特殊な行列.

定義 (転置行列)

$A = (a_{ij})$: (m,n) 行列 に対し, (i,j) 成分が a_{ji} で与えられる (n,m) 行列 を Aの転置行列 (行と列を入れ替える) といい, ${}^tA$, A^T などで表す.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ならば, } \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すなわち $A=(a_{ij})$ に対し ${}^tA=(a_{ji})$. ■

命題 転置行列について、次の等式が成り立つ。

(1) A, B がともに (m, n) 行列のとき、${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$.

(2) c がスカラーのとき、${}^t(cA)=c\,{}^tA$.

(3) ${}^t({}^tA)=A$.

(4) A が (m, n) 行列、B が (n, l) 行列のとき、
${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

Proof (1) $\underbrace{A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})}_{A,B\text{の成分をそれぞれ}}$ で表す。

また、A+B の成分を $A+B=(a+b)_{ij}$ で表す。
このとき、行列の和の定義より

$$
\begin{aligned}
{}^t(A+B) &= (a+b)_{ji} = (a_{ji}+b_{ji}) \\
&= a_{ji}+b_{ji} = {}^tA+{}^tB
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(2) 行列のスカラー倍の定義より

$$ {}^t(cA) = (ca_{ji}) = c\,(a_{ji}) = c\,{}^tA . $$

(3) $${}^t({}^tA) = {}^t((a_{ji})) = a_{ij} = A .$$

(4) AB の (i, j) 成分を $(ab)_{ij}$ で表すと、

$$ {}^t(AB) = (ab)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} . $$

一方、${}^tB\,{}^tA=(b_{ji})(a_{ji})$ の (i, j) 成分は

$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = (ab)_{ji}$ で、${}^t(AB)$ の (i, j) 成分
と一致する。

NO. 40

DATE 5.19.2013

★直観的な説明

${}^t(AB)$ の (i,j) 成分は、AB の (j,i) 成分 $\Rightarrow$ Aの第j行とBの第i列の積和。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \ \cdots \ a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

一方、${}^tA$, ${}^tB$ でみると…

$${}^tB = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{b_{1i} \ \cdots \ b_{ni}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1l} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

${}^tB$ の第i行と ${}^tA$ の第j列の積和に等しくなる。 ▨

定義（対称行列）

${}^tA = A$ をみたす正方行列を対称行列という。

$A = (a_{ij})$ のとき、Aが対称行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_{ji} = a_{ij}$。

（すなわち、Aの (j,i) 成分と (i,j) 成分が等しい。
Aの成分が、対角成分に対して線対称であるように見える。） ▨

定義（交代行列）

${}^tA = -A$ をみたす正方行列を交代行列あるいは歪（かい）対称行列という。

$A = (a_{ij})$ のとき、Aが交代行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_{ji} = -a_{ij}$。 ▨

定義（対角行列、スカラー行列）

対角成分以外がすべて0である対称行列を対角行列とよぶ。

KOKUYO

対角行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ を diag$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

"diagonal" の略。
(英：対角線(の)，斜め方向(の))．

で表す．

対角成分がすべて等しい対角行列（単位行列のスカラー倍）を <u>スカラー行列</u> とよぶ．

$$aE_n = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

<u>命題</u> (例題 1.3) $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ がすべての $X = (x_{ij}) \in K^{n\times n}$ に対して $AX = XA$ をみたす
$\Rightarrow$ A はスカラー行列．

P.43：証明の直前のつけ足し（例1）

Proof (1) オーソドックスな証明．

AX の (i,j) 成分を $(ax)_{ij}$，XA の (i,j) 成分を $(xa)_{ij}$ で表す．$(ax)_{ij} = (xa)_{ij}$ ($\forall i = 1,\dots,n$，$\forall j = 1,\dots,n$ に対し．) をみたす a_{ij} の条件を求める．

行列の積の定義より．
$$(ax)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj}.$$
$$(xa)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj}.$$

$\forall i = 1,\dots,n$，$\forall j = 1,\dots,n$ に対し．$(ax)_{ij} = (xa)_{ij}$ より
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj}. \quad \cdots ①$$

① の右辺を左辺に移項すると．
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} = 0. \quad \cdots ②$$

② の和の記号を展開すると

$$a_{i1}x_{1j} + \cdots + a_{i\,i-1}x_{i-1\,j} + a_{ii}x_{ij} + a_{i\,i+1}x_{i+1\,j} + \cdots + a_{in}x_{nj}$$
$$- a_{1j}x_{i1} - \cdots - a_{j-1\,j}x_{i\,j-1} - a_{jj}x_{ij} - a_{j+1\,j}x_{i\,j+1} - \cdots - a_{nj}x_{in}$$

①の右辺と左辺両方に現われるこの項に注目．x_{ij}でまとめる．

$$= (a_{ii} - a_{jj})x_{ij}$$
$$+ a_{i1}x_{1j} + \cdots + a_{i\,i-1}x_{i-1\,j} + a_{i\,i+1}x_{i+1\,j} + \cdots + a_{in}x_{nj}$$
$$- a_{1j}x_{i1} - \cdots - a_{j-1\,j}x_{i\,j-1} - a_{j+1\,j}x_{i\,j+1} - \cdots - a_{nj}x_{in} = 0. \quad \cdots ③$$

すべての $X \in K^{n\times n}$ に対して ③が成り立つならば．
すべての $i=1,\dots,n$，$j=1,\dots,n$ に対し．

$$a_{ii} = a_{jj}, \quad a_{i1} = \cdots = a_{i\,i-1} = a_{i\,i+1} = \cdots = a_{in}$$
$$= a_{1j} = \cdots = a_{j-1\,j} = a_{j+1\,j} = \cdots = a_{nj} = 0.$$

よって，すべての $i \neq j$ $(i,j=1,\dots,n)$ に対し．
$a_{ii} = a_{jj}$，$a_{ij} = 0$ でなければならない．
ゆえに A はスカラー行列．

より技巧的な証明（教科書の証明）．

Xとして，第r行の成分が1，それ以外の成分が0のものをとる．

「第r行」を表すため．

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} < r$$

そして $\overset{r\neq i\text{のとき}}{\vee}$ AX と XA の (i,j)成分を比較する．

(i) AX：

$$\begin{array}{c} \\ i > \end{array} \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \end{array} < r \Rightarrow (ax)_{ij} = a_{ir}.$$

(ii) XA：

$$\begin{array}{c} i > \\ r > \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow (xa)_{ij} = 0. \quad (\because i \neq r).$$

よって $(ax)_{ij} = a_{ir} = 0 = (xa)_{ij}$.

∴ $r \neq i$ ならば $a_{ir} = 0 \Rightarrow$ A は対角行列.

このとき. AX と XA の (i,j) 成分を比較すると

(iii) AX.

$$i > \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{ii} & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & x_{1j} & \\ & \vdots & \\ & x_{ij} & \\ & \vdots & \\ & x_{nj} & \end{pmatrix} < i = a_{ii} x_{ij}.$$

(iv) XA.

$$i > \begin{pmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{jj} & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = x_{ij} a_{jj}.$$

よって $(ax)_{ij} = a_{ii} x_{ij} = x_{ij} a_{jj} = (xa)_{ij}$. --- ⑤

∴ 任意の x_{ij} に対して ⑤ が成り立つとすると. $a_{ii} = a_{jj}$. がすべての i,j に対して成り立つ. ゆえに A はスカラー行列.

□

★ 証明の道筋のつけ方 (例)

- スタートとゴールをはっきりさせる.

今回の場合.

$\boxed{\text{ゴール}}$ A はスカラー行列.

$\longrightarrow$ $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$. $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$. } を示す.

$\boxed{\text{スタート}}$ すべての $X = (x_{ij})$ に対して $AX = XA$

$\longrightarrow$ AX の (i,j) 成分と XA の (i,j) 成分を比較し. それらが等しいときに成り立つ性質を探る.