5/24

命題（例題1.4） すべての正方行列は、対称行列と交代行列の和に一意的に表される。

★これは、2つの事実を主張している。

① $^\forall X \in K^{n\times n}$ に対し、対称行列 $A \in K^{n\times n}$ と交代行列 $B \in K^{n\times n}$ が存在して、$X = A + B$ が成り立つ。（存在）。

② ①の $X \in K^{n\times n}$ に対し、①の A, B をとれ。$X = A' + B'$ をみたす対称行列 $A' \in K^{n\times n}$ と交代行列 $B' \in K^{n\times n}$ が存在したとするならば、$A' = A$, $B' = B$ が成り立つ。（一意性）。

Proof. ① $X \in K^{n\times n}$ とする。このとき、

$A = \dfrac{X + {}^tX}{2}$ とおくと、$\underline{A\text{は対称行列}}$,

（これらは各自で示そう）

$B = \dfrac{X - {}^tX}{2}$ とおくと、$\underline{B\text{は交代行列}}$。

また $X = A + B$ が成り立つことがわかる。①が示された。

② ①の A, B をとれ。$X = A' + B'$ をみたす対称行列 A' と交代行列 B' が存在したとすると、

$$A + B = X = A' + B'$$

より、A', B を移項して

$$A - A' = B' - B \quad \cdots (1)$$

ここで、$\left\{\begin{array}{l}\cdot\ A, A'\text{は対称行列より、}A - A'\text{は対称行列。}\\ \cdot\ B, B'\text{は交代〃 〃 }B' - B\text{は交代〃。}\end{array}\right.$

(1)式より $A - A' = B' - B$ は対称行列かつ交代行列。

<u>対称行列かつ交代行列である行列は零行列に限る。</u>

よって $A - A' = B' - B = O$ より $A' = A$, $B' = B$ が成り立つ。 ▨

注意 上の命題の証明では、以下の事実を用いている。（各自証明してみよう。）

① $^\forall X \in K^{n\times n}$ に対し、$\dfrac{X + {}^tX}{2}$ は対称行列。

② ${}^\forall X \in K^{n\times n}$ に対し、$\dfrac{X - {}^tX}{2}$ は交代行列。

③ A, A' を対称行列、c をスカラーとするとき、$A + cA'$ もまた対称行列。

④ B, B' を交代行列、c をスカラーとするとき、$B + cB'$ もまた交代行列。

⑤ X が対称行列かつ交代行列 $\Rightarrow X = O$. ∎

定義（上三角行列、下三角行列）

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ が $a_{ij} = 0 \ {}^\forall i > j$ をみたすとき、
（すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

）
A を<u>上三角行列</u>という。

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ が $a_{ij} = 0 \ {}^\forall j > i$ をみたすとき、
（すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

）
A を<u>下三角行列</u>という。 ∎

注意 $A \in K^{n\times n}$ が上三角行列かつ下三角行列
$\Leftrightarrow$ A は対角行列。 ∎

§1.6 行列のブロック分割

この節のポイント

① 行列をいくつかのブロック（小さな行列）に分けて扱うこと。

② ブロック分割した行列の積は、各ブロックを行列の成分のように扱って計算できること。

定義 (小行列).

A を (m,n) 行列とする. $A=(a_{ij})$

A から r 行 $(i_1,\dots,i_r)$ $(r\leq m)$, s 列 $(j_1,\dots,j_s)$ $(s\leq n)$ を取り出し. A の $(i_1,j_1),\dots,(i_r,j_s)$ 要素 [それぞれ $(1,1),\dots,(r,s)$ 要素と] する行列を A の小行列という.
(submatrix) □

例

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ とする.

このとき, A の 第1行, 第4行, および 第1列, 第3列 を取り出すことによって得られる小行列は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{pmatrix}.$$ $(2,2)$ 行列. □

注意 A の小行列をつくる時, 取り出す行や列は, 一般には連続した行や列でなくてもよい.
但し, 次に述べるブロック分割においては, A の連続した行, 列の集まりから小行列を構成する. □

定義 (ブロック分割)

A: (m,n) 行列を, 下図のような小行列の組み合わせで表す:

$$\begin{array}{c|cccc} & n_1\text{列} & n_2\text{列} & & n_s\text{列} \\ \hline m_1\text{行}\{ & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ m_2\text{行}\{ & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_r\text{行}\{ & A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}$$

A の各小行列 A_{ij} $(i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s)$ を A のブロックとよぶ.

そして, A のブロックを A の成分のようにして

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

と表し、これを A の <u>ブロック分割</u> という。 $\blacksquare$

<u>命題</u>　A : (m, n) 行列、 B : (n, l) 行列 とする。
A と B のブロック分割 において、
A の列の分割 と B の行の分割 が それぞれ $(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ であるとする

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{n_1列} & \overbrace{\quad}^{n_2列} & & \overbrace{\quad}^{n_t列} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}m_1行 \\ \}m_2行 \\ \\ \}m_s行 \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{l_1列} & \overbrace{\quad}^{l_2列} & & \overbrace{\quad}^{l_u列} \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}n_1行 \\ \}n_2行 \\ \\ \}n_t行 \end{array}.$$

このとき、行列 $C = AB$ は、以下の形のブロック分割で表される。

← B の各ブロックの列数

← A の各ブロックの行数。

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{l_1列} & \overbrace{\quad}^{l_2列} & & \overbrace{\quad}^{l_u列} \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}m_1行 \\ \}m_2行 \\ \\ \}m_s行 \end{array},$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \quad (i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, u).$$

Proof　示すこと。

C_{ij} $(i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, u)$ に対し、

C_{ij} の (m, l) 成分 $(m = 1, \ldots, m_i,\ l = 1, \ldots, l_j)$
が
$(A_{i1}B_{1j}$ の (m, l) 成分$) + \cdots + (A_{it}B_{tj}$ の (m, l) 成分$)$
に等しいことを示す。

C_{ij} の (m,l) 成分を、行列 C の成分として見ると、それぞれ $\underbrace{}_{(p,q)}$

$$\begin{cases} (行) & p = m_1 + \cdots + m_{i-1} + m. \\ (列) & q = l_1 + \cdots + l_{j-1} + l \end{cases}$$

が成り立つ。よって、$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ とするとき、

$$\underset{\left(\substack{\| \\ C_{ij} の (m,l) \\ 成分}\right)}{c_{pq}} = \sum_{k=1}^{n_1+\cdots+n_t} a_{pk} b_{kq}.$$

↓ この和を分割すると

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n_1} a_{pk} b_{kq}}_{\substack{\| \\ A_{i1}B_{1j} の \\ (m,l) 成分.}} + \underbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} a_{pk} b_{kq}}_{\substack{\| \\ A_{i2}B_{2j} の \\ (m,l) 成分.}} + \cdots + \underbrace{\sum_{k=n_1+\cdots+n_{t-1}+1}^{n_1+\cdots+n_t} a_{pk} b_{kq}}_{\substack{\| \\ A_{it}B_{tj} の \\ (m,l) 成分}}.$$

と表される。

これは C_{ij} の (m,l) 成分であるので、行列の積の定義より ($m = 1, \ldots, m_i$, $n = 1, \ldots, l_j$ をとると)

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj}$$

が成り立つ。 ∎

§1.7 正則行列.

<u>命題</u> $\forall A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ と n 次単位行列 $E_n = (\delta_{ij})$ に対し. $AE_n = E_n A = A$ が成り立つ.

<u>Proof</u> 行列の積の定義より

AE_n の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$.

$E_n A$ の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$.

ゆえに $AE_n = E_n A = A$ が成り立つ. ∎

☆ E_n が「単位行列」と呼ばれる由来. 数の 1 と同じような役割をもつ.

問 では. 行列 A に対して 行列 B で $AB = BA = E_n$ となるものが存在するか?

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$: 存在するとは限らない. 例. 5.
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$: 存在する. $q \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \cdot q = 1$. $(q \neq 0)$
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$: 存在する. $r \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot r = 1$ $(r \neq 0)$.

<u>例</u> ① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対して
(教科書 p.27)

$AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. B としてどんな行列をもってきても

AB の第2行は 0 ゆえ. $AB = BA = E_2$ をみたす B は存在しない.

② $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと

$AB = BA = E_2$.

定義 (正則(行列), 逆行列)

$A \in K^{n\times n}$ に対し、ある行列 $B \in K^{n\times n}$ が存在して $AB = BA = E_n$ が成り立つとき、Aは正則である、もしくはAを正則行列という。
このとき、BをAの逆行列という。■

命題 Aが正則で、B, B' がともにAの逆行列であるとき、$B = B'$. すなわちAの逆行列は一意に定まる。(このとき、Aの逆行列を A^{-1} で表す。)
インバース

Proof B, B' はAの逆行列であるので、$BA = AB' = E_n$.

このとき、$B = BE_n = B(AB') = (BA)B' = E_n B' = B'$.
が成り立つ。ゆえに $B = B'$. ■

定理1.4 (1)(正則行列の積もまた正則行列).

$A, B \in K^{n\times n}$ がともに正則
$\Rightarrow$ 積ABもまた正則で、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2)(正則行列の逆行列もまた正則行列).

$A \in K^{n\times n}$ が正則 $\Rightarrow$ A^{-1}もまた正則で、$(A^{-1})^{-1} = A$.

Proof (1) (AB)▨ $=$ ▨$(AB) = E_n$ をみたす行列▨の存在を示す。
▨ $= B^{-1}A^{-1}$ とおくと。
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$.
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$. より
AB は正則で、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Aが正則より、$AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

このとき、これ(A)を A^{-1} の逆行列とみなすことができる。■

定理 1.5 (正則行列の転置行列も正則)

$A \in K^{n \times n}$ が正則 $\Rightarrow$ ${}^tA$ もまた正則で，
$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
これを ${}^tA^{-1}$ で表す.

Proof ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tE_n = E_n$.
${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE_n = E_n$.
ゆえに $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. ∎