5/28

第2章. 連立1次方程式と行列.

§2.1 (行列の) 基本変形

◍ 連立1次方程式の加減法から行列の基本変形を考える.

(例) 次の連立1次方程式を解こう.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -11 \\ -x - 4y = 10 \end{cases}.$$

解法 加減法 ⟺ 行列

(1) $\begin{cases} 2x + 5y = -11 & \cdots \text{①} \\ -x - 4y = 10 & \cdots \text{②} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -11 \\ -1 & -4 & 10 \end{array}\right) \uparrow \times 2$

① + 2 ×②

(2) $\begin{cases} -3y = 9 & \cdots \text{③} \\ -x - 4y = 10 & \cdots \text{④} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 9 \\ -1 & -4 & 10 \end{array}\right) \downarrow \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

$\left(-\frac{4}{3}\right) \times$ ③ + ④

(3) $\begin{cases} -3y = 9 & \cdots \text{⑤} \\ -x = -2 & \cdots \text{⑥} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$ 交換.

⑤と⑥を交換.

(4) $\begin{cases} -x = -2 & \cdots \text{⑦} \\ -3y = 9 & \cdots \text{⑧} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array}$

⑦ × (−1), ⑧ × $\left(-\frac{1}{3}\right)$

(5) $\begin{cases} x = 2 & \cdots \text{⑨} \\ y = -3 & \cdots \text{⑩} \end{cases}$ $\boxed{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)}$.

この形で後で重要.

操作

(1) ある方程式を c (≠0) 倍する	⟺	(1) ある行を c (≠0) 倍する
(2) 2つの方程式を入れ換える	⟺	(2) 2つの行を入れ換える.
(3) ある方程式の c 倍を他の方程式に加える.	⟺	(3) ある行の c 倍を他の行に加える.

$\underbrace{\text{(1)〜(3)}}$ 行列の 行基本変形. として扱う.

定義 (行基本変形、行変形)

$A \in K^{m\times n}$, $c \in K$, $1 \le i, j \le m$ ただし $i \neq j$.
に対し、次の3つの変換をAの行基本変形という:

(1) Aの第i行を $c\,(\neq 0)$ 倍する.
(2) Aの第i行と第j行を入れ換える.
(3) Aの第i(j)行に第j(i)行のc倍を加える.

行基本変形を繰り返し施す操作を行変形という. ▨

定義 (基本行列)

単位行列 E_m に上の行基本変形 (1), (2), (3) を施したもの (それぞれ (1)′, (2)′, (3)′ に表す) を、m次基本行列という.

(1)′
$$E_i(c) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & i & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & c & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}, \quad c \neq 0.$$

(2)′
$$P_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(3)′
$$E_{ij}(c) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & i & & j & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & 1 & \cdots & c & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

▨

命題 基本行列は正則で、逆行列もまた正則.

Proof (1)′ $E_i(c)$ は E_m の第i行をc倍した行列なので、
$E_i(c)$ の第i行を $1/c$ 倍すれば E_m に戻る.
ゆえに $(E_i(c))^{-1} = E_i(1/c)$.

(2)' P_{ij} は E_m の第 i 行と第 j 行を入れ換えたものなので、再び P_{ij} の第 i 行と第 j 行を入れ換えれば E_m に戻る。ゆえに $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$.

(3)' $E_{ij}(c)$ は E_m の第 i 行に第 j 行の c 倍をかえたものなので、$E_{ij}(c)$ の第 i 行に第 j 行の $(-c)$ 倍をかえれば E_m に戻る。ゆえに $(E_{ij}(c))^{-1} = E_{ij}(-C)$. ▨

注意 $A \in K^{m\times n}$ に m 次基本行列 (1)', (2)', (3)' を左からかけると、それぞれ A の行基本変形 (1), (2), (3) が得られる。

▨ より一般的な行列の行変形.

(m, n) 行列 A の行変形は、m 次正方行列 C を A の左側からかけることにより行う.

A に行変形 C を施した結果（を表す行列）を B とする. すなわち

$$B = CA.$$

このとき

$C = (c_{ij})$ $\Longleftrightarrow$ A の第 j 行の c_{ij} 倍を B の第 i 行に加える.

ことを意味する.

(例) C : 3次正方行列の場合.

$$\begin{array}{c}B\\ \| \\ \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \mathbf{b}_3\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{cc} C & \\ \| & \\ \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\ c_{21}&c_{22}&c_{23}\\ c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{第1行}\leftarrow\\ \text{第2行}\leftarrow \text{Bの}\\ \text{第3行}\leftarrow\end{array} \\ \begin{array}{ccc}\text{第1行}&\text{第2行}&\text{第3行}\end{array} & \\ \text{Aの} & \end{array} \begin{array}{c}A\\ \| \\ \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\mathbf{b}_i = c_{i1}\mathbf{a}_1 + c_{i2}\mathbf{a}_2 + c_{i}\ \mathbf{a}_3$$

$$C = \begin{pmatrix}\times & \text{②} & \times\\ \times & \times & \times\\ \times & \times & \times\end{pmatrix}$$ のとき. $(c_{12} = 2)$.

A の第2行の2倍を B の第1行に加える.

▨ 行列の行変形による簡約階段行列への変換.

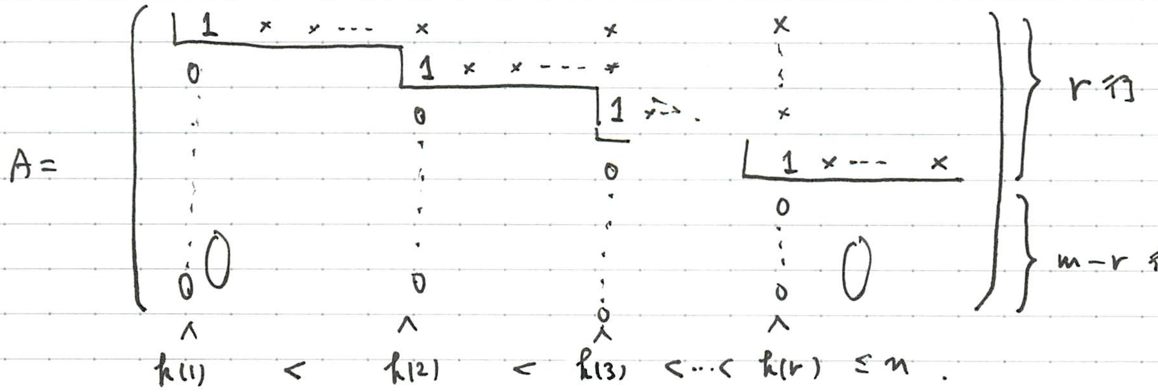
定義 (階段行列)

$A \in K^{m\times n}$ の第 i 行 $\neq \mathbf{0}$ のとき,
$= (a_{ij})$

A の第 i 行の先頭列 $k(i)$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ A の第 i 行 $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ の最も左側の非ゼロ成分が属する列.

A が次の条件をみたすとき. A を階段行列という.

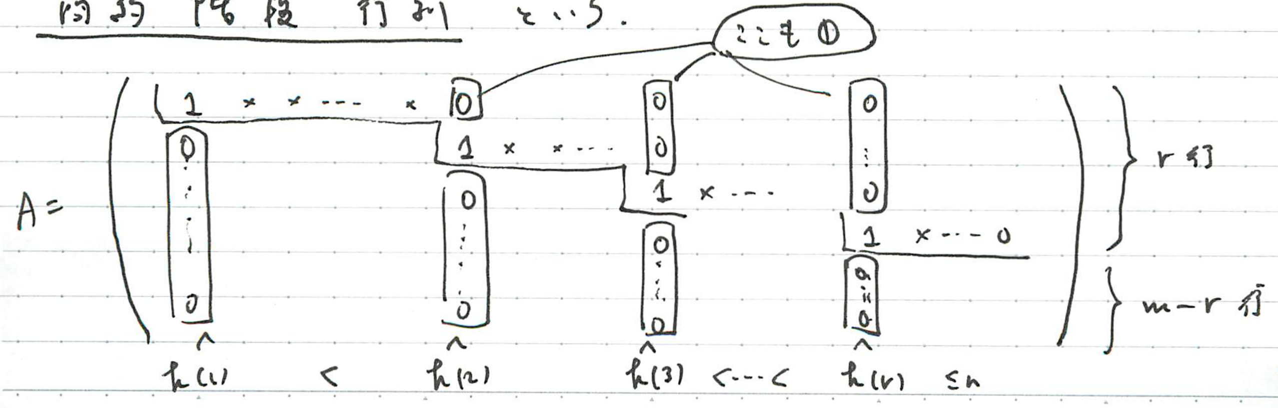
(i) $k(1) < k(2) < \cdots < k(r) \leq n$. $(r \leq m)$.
(ii) $a_{1k(1)} = \cdots = a_{rk(r)} = 1$. $(r \leq m)$.
(iii) $r < m$ のとき, 第 $(r+1)$ 行以下は $\mathbf{0}$.



▨

定義 (簡約階段行列)

$A \in K^{m\times n}$ が階段行列. かつ $a_{ik(i)}$ を含む列ベクトルの成分が $a_{ik(i)} = 1$ を除いてすべて 0 であるとき. A を簡約階段行列という.



▨

注意 A: 正則行列が簡約階段行列 ⟹ Aは単位行列 E_n. ▨

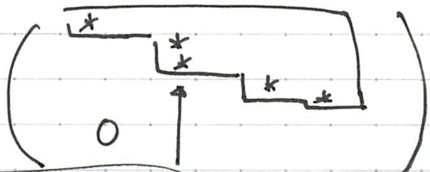
定理2.1 (すべての行列は行変形によって簡約階段行列へ変換可能).

$\forall A \in K^{m\times n}$ に対し. $\exists B \in K^{m\times m}$: 正則行列.
s.t. BA は簡約階段行列.

Proof のポイント (変換の手順)

① すべての成分が0である行へ. 行の入れ換えにより最下段にまとめる.

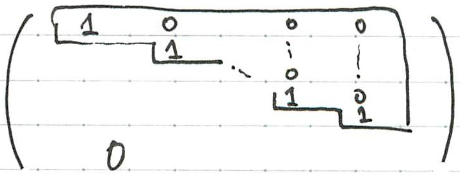
② 非ゼロの各行に対して. 行の入れ換えを行って. $k(1)\le k(2)\le\cdots\le k(r')$ とする.



③ 段差が2以上の階段がある場合は. 上の行を $\overset{\text{定数}}{c}$ 倍して下の行の階段を消去できる. これにより. 階段の段差をすべて1段ずつに変換する.

④ 段差の部分をすべて1にするよう. 必要な行を定数倍する. これにより 階段行列が得られる.

⑤ 段差の上の非ゼロの成分を適宜 $\overset{\text{行変形で}}{\text{消して}}$ 0にする. これにより. 簡約階段行列が得られる.



⑥ ①~⑤の変換はすべて行基本変形の組み合わせによって得られる. ゆえに. これらに対応する m次基本行列 $Q_1,\cdots Q_s$ が存在して. $Q_s\cdots Q_1A$ が簡約階段行列になる. よって $B=Q_s\cdots Q_1$ とおけばよい. $Q_1,\ldots,Q_s$ は正則ゆえ, $B=Q_s\cdots Q_1$ も正則. ▨

定理2.2 （簡約階段行列の一意性）.
$A \in K^{m\times n}$ に対し、$P_1, P_2 \in K^{m\times m}$ （P_1, P_2 は正則）が存在して、
P_1A, P_2A がともに簡約階段行列になるならば
$P_1A = P_2A$ が成り立つ。 ☒

Proof. Aの列数 n に関する帰納法.

① $n=1$ のとき. Aの簡約階段行列は

$$\mathbb{0} \quad \text{or} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad のみ.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$A = \mathbb{0} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

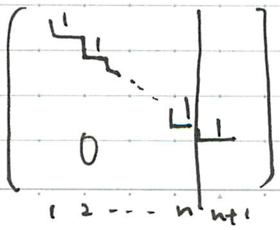
により OK.

② n列までは OK と仮定し. $(m, n+1)$ の場合を考える.
このとき. $B = P_1A$ と $P_2A = C$ の 第1列, …, 第n列は,
帰納法の仮定より一致する.

1, …, n列までに, どの行の先頭列にもなっていない列があれば, その列を除いた行列も簡約階段行列になるので. 帰納法の仮定より B と C の $(n+1)$列も一致.

これを第k列 $(1 \leq k \leq n)$ とする. Aの第k列を除いた行列を A' とおくと. P_1A', P_2A' はともに簡約階段行列. かつ P_1A', P_2A' は n列より, 帰納法の仮定から $P_1A' = P_2A'$.
ゆえに P_1A と P_2A の $(n+1)$列も一致する.

③ 残ったcaseは. P_1A と P_2A の n列までは $(e_1|\cdots|e_n)$ となる case.



このとき, P_1A と P_2A の $(n+1)$列がともにある行の先頭列であるならば, それは$(n+1)$行.
ゆえに. このとき $P_1A = P_2A$.

④ さらに残った case は、 P_1A の $(n+1)$ 列 が どの行の先頭列 にもなっていない case.

このとき

$$B = P_1A = \begin{pmatrix} \overset{(n,n)}{E_n} & \overset{(n,1)}{u} \\ \underset{(m-n,n)}{O} & \underset{(m-n,1)}{O} \end{pmatrix}, \quad C = P_2A = \begin{pmatrix} \overset{(n,n)}{E_n} & \overset{(n,1)}{u} \\ \underset{(m-n,n)}{O} & \underset{(m-n,1)}{F} \end{pmatrix}$$

とおく。

P_1, P_2 は 正則 より、 $C = \underbrace{P_2P_1^{-1}}_{P}\underbrace{P_1A}_{B} = PB$, P ← とおく。

$$P = \begin{pmatrix} \overset{(n,n)}{P_{11}} & \overset{(n,m-n)}{P_{12}} \\ \underset{(m-n,n)}{P_{21}} & \underset{(m-n,m-n)}{P_{22}} \end{pmatrix}$$

とおくと。

$$PB = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & u \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{(n,n)}{P_{11}} & \overset{(n,1)}{P_{11}u} \\ \underset{(m-n,n)}{P_{21}} & \underset{(m-n,1)}{P_{21}u} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} E_n & u \\ O & F \end{pmatrix}$$

より $P_{11} = E_n$, $u = P_{11}u = u$, $P_{21} = O$, $F = P_{21}u = O$.
$F = O$ より $B = P_1A = C = P_2A$ を得る。 ▨

定理 2.3 (正則行列は基本行列の積)
正方行列 A について、次が成り立つ。
A は 正則行列 $\Longleftrightarrow$ A は有限個の基本行列の積で表せる。

Proof 教科書 p.39 を参照。 ▨

5/28