④ さらに残った case は、$P_1 A$ の $(n+1)$ 列が どの行の 先頭列にも なっていない case.
このとき

$$B = P_1 A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (n,n) & (n,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_n & v \\ O & O \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} (m-n,n) & (m-n,1) \end{array} \end{array}, \quad C = P_2 A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (n,n) & (n,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} E_n & u \\ O & F \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} (m-n,n) & (m-n,1) \end{array} \end{array}$$ とおく。

P_1, P_2 は正則より、 $C = \underbrace{P_2 P_1^{-1}}_{=P} \underbrace{P_1 A}_{=B} = PB$,

P ← とおく。

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (n,n) & (n,m-n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} (m-n,n) & (m-n,m-n) \end{array} \end{array}$$ とおくと、

$$PB = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & v \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (n,n) & (n,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{11}v \\ P_{21} & P_{21}v \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} (m-n,n) & (m-n,1) \end{array} \end{array} = C = \begin{pmatrix} E_n & u \\ O & F \end{pmatrix}$$

より $P_{11} = E_n$, $u = P_{11} v = v$, $P_{21} = O$, $F = P_{21} v = O$.
$F = O$ より $B = P_1 A = C = P_2 A$ を得る。 ∎

定理 2.3 (正則行列は基本行列の積)
正方行列 A について、次が成り立つ。
A は正則行列 $\iff$ A は有限個の基本行列の積で表せる。

Proof 教科書 p.39 も参照。

5/28

($\Rightarrow$) A が正則行列 $\Rightarrow$ 定理 2.1 より、$\exists B \in K^{m \times m}$: 正則行列
s.t. BA は簡約階段行列。
ところが 正則行列の積は また正則行列 (定理 1.4 (1)) であるので、BA は正則行列。 ∴ $BA = E_m$ …①

∴ $B = A^{-1}$. 定理 2.1 の B の構成より、B は m 次基本行列の

(次頁へつづく)

(前頁から続く)
有限個の積であるので、$B^{-1} = A$ もまた、m次基本行列の有限個の積で表される。

(⇐) $A = Q_1 \cdots Q_r$, ($Q_1, \dots, Q_r$ は m次基本行列) で表されるならば、$A^{-1} = Q_r^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ は A の逆行列となる。実際

$$AA^{-1} = Q_1 \cdots Q_r Q_r^{-1} \cdots Q_1^{-1} = E_m,$$
$$A^{-1}A = Q_r^{-1} \cdots Q_1^{-1} Q_1 \cdots Q_r = E_m.$$

よって A は正則。 ∎

<u>命題</u> (p.56 の注意) $A \in K^{n \times n}$: 正則行列が簡約階段行列ならば、$A = E_n$.

Proof A が正則行列で、かつ簡約階段行列ならば、A は次の形をしていなければならない。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} \; \underset{\text{重要!}}{r = n}.$$

すなわち、A の対角成分はすべて 1.

もし $r < n$, たとえば A の第 n 行が $a_n = (0 \cdots 0)$ だったとすると、a_n にどんな列ベクトルを右からかけても 0. よって、どんな正方行列 $B \in K^{n \times n}$ をかけても単位行列 E_n に等しくなることはないので、「A が正則行列」という仮定に矛盾する。

また、簡約階段行列の定義より、A の第 i 列は基本ベクトル e_i に等しい。よって $A = E_n$ がわかる。 ∎

§2.2. 逆行列の計算.

定義 (行列をブロックとして並べた行列)

$A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{m\times l}$ のとき, A と B をそれぞれ左側, 右側のブロックにもつ行列を $(A|B)$ で表す.

☆ $(A|B)$ は $(m, n+l)$ 行列. ▨

◎ 正則行列が与えられた時の逆行列の作り方.

$A \in K^{n\times n}$: 正則のとき. $(A|E_n) \xrightarrow[\text{行変形}]{} (E_n|B)$ にすると. 求めた B が A^{-1} に等しい.

(例) (3, 3) の場合.

もし (1,1) 成分が 0 のときは事前に他の行と交換し, (1,1) 成分 $\neq 0$ とする.

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}\times & \times & \times\\ \times & \times & \times\\ \times & \times & \times\end{matrix}}^{A}\;\middle|\;\overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{matrix}}^{E_n}\right)$$

$\Downarrow$ 第1行を定数倍して (1,1) 成分を 1 にする.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & 1 & \\ \times & \times & \times & & & 1\end{array}\right)$$

$\Downarrow$ 行変形で第1列を消去.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \times & \times & \times & \times & \times\\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times\\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times\end{array}\right)$$

$\Downarrow$ 第2行を定数倍して (2,2) 成分を 1 にする.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \times & \times & \times & \times & \times\\ 0 & 1 & \times & \times & \times & \times\\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times\end{array}\right)$$

$\Downarrow$ 行変形で第2列を消去.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \times & \times & \times & \times\\ 0 & 1 & \times & \times & \times & \times\\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times\end{array}\right)$$

$\Downarrow$ 第3行を定数倍して (3,3) 成分を 1 にする.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \times & \times & \times & \times\\ 0 & 1 & \times & \times & \times & \times\\ 0 & 0 & 1 & \times & \times & \times\end{array}\right)$$

$\Downarrow$ 行変形で第3列を消す.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times & \times & \times \end{array}\right)$$

B $\longrightarrow$ この B が A^{-1} になる. ☒

命題 $A \in K^{n \times n}$ が正則行列のとき. $(A \mid E_n)$ に行変形を施して $(E_n \mid B)$ になるならば.
$B = A^{-1}$.

Proof A を E_n に変換するような行変形は. ある正則行列の積として Q で表され. $QA = E_n$ が成り立つ.
このとき $Q = A^{-1}$.

ここでブロック行列の積を思い出すと.
$$Q\,(A \mid E_n) = (QA \mid QE_n)$$
$$= (A^{-1}A \mid A^{-1}E_n) = (E_n \mid A^{-1}).$$
よって $(E_n \mid B) = (E_n \mid A^{-1})$ より $B = A^{-1}$. ☒

§2.3 連立1次方程式.

次の連立1次方程式を考える.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

この方程式は.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \le j \le n),$$

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \qquad (2.2)$$

これは

$$x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + \cdots + x_n \mathbb{a}_n = \mathbb{b} \qquad (2.3)$$

と表すことができる。

定義（係数行列，拡大係数行列）
式(2.2)の行列Aを，連立1次方程式(2.1)の係数行列という。
式(2.2)の行列Aと右辺の列ベクトル$\mathbb{b}$を並べた行列 $\tilde{A} = (A \mid \mathbb{b})$ を，連立1次方程式(2.1)の拡大係数行列という。

問 連立1次方程式(2.1)の解の個数はどのようにして知ることが可能か？
（1 or 0 or ∞.）

⇒ 拡大係数行列の簡約階段行列を求めればわかる！

命題. 連立1次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ (2.2) の両辺にm次正則行列Bを左からかけた方程式

$$(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b} \qquad (2.4)$$

の解$\mathbb{x}'$は，方程式(2.2)の解でもある。

Proof 仮定より $\mathbb{x}'$は $(BA)\mathbb{x}' = B\mathbb{b}$ をみたす。この式の両辺にB^{-1}を左からかけると，$A\mathbb{x}' = \mathbb{b}$.
（Bは正則ゆえ，B^{-1}は存在する）
すなわち $\mathbb{x}'$は(2.2)の解でもある。 ■

☆ 連立1次方程式の両辺に左側から正則行列をかけても解は変わらない。

⟶ 拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \mid \mathbb{b})$ を行変形で簡約階段行列に変換し，解の個数を探る。

秀

定理 2.4　連立1次方程式 (2.1) は、その拡大係数行列を（行変形で）簡約階段行列に変換することで解ける。

↑ 解の個数と表現がわかる。

Proof　連立（1次）方程式 (2.1) の拡大係数行列 $\tilde{A}=(A\mid \mathbb{b})$ に対し、ある行変形（⇔ 正則行列 B）が存在して、$B\tilde{A}=\tilde{A}'=(A'\mid \mathbb{b}')$ が簡約階段行列になる。

このとき、$(A'\mid \mathbb{b}') = B(A\mid \mathbb{b}) = (BA\mid B\mathbb{b})$

より、連立1次方程式 $\underset{\overset{\parallel}{A'}}{(BA)}x = \underbrace{B\mathbb{b}}_{\mathbb{b}'}$（を解くこと）は $\underbrace{Ax=\mathbb{b}}$（を解くこと）と同値。

よって、$A'x=\mathbb{b}'$ … (2.5) を考える。

$A'x=\mathbb{b}'$ の拡大係数行列 $(A'\mid \mathbb{b}')$ は以下の形をしている。

$$(A'\mid \mathbb{b}') = \begin{pmatrix} 1 & * \cdots & 0 & & 0 & & 0 & & b_1' \\ & & 1 & * \cdots & 0 & & 0 & & b_2' \\ & & & & 1 & * \cdots & 0 & & b_3' \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & * \cdots & b_r' \\ & O & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\hat{}\ k(1) \qquad \hat{}\ k(2) \qquad \hat{}\ k(3) \qquad \cdots \qquad \hat{}\ k(r).$$

ここで、$k(r)\le n+1$ より、① $k(r)\le n$、③ $k(r)=n$、③ $k(r)=n+1$ の場合に分けて考える。

① $k(r)\le n$ の場合。

$I=\{i\mid 1\le i\le n,\ i\ne k(1),\dots,i\ne k(r)\}$ とする。

すなわち、$k(1),\dots,k(r)$ に現われない列番号の集まり。

すると、連立方程式 (2.5) は以下の形になる。