定理2.4 連立1次方程式 (2.1) は、その拡大係数行列を行変形で簡約階段行列に変換することで解ける。 ← 解の個数と表式がわかる。

◎ 定理2.4の証明のアウトライン。　　解は変わらない！　　6/4

連立1次方程式　$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (2.1)　　　$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (2.5)

拡大係数行列　$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{行変形}} B\tilde{A} = \tilde{A}' = (A' \mid \mathbf{b}')$

B：正則行列　　$(A' \mid \mathbf{b}')$：簡約階段行列

よって、$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (2.1) を $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (2.5) で解く。

(例) A が ~~(3,5)~~ (5,3) 行列の場合で考える。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{b}}.$$

(3,5) 行列
$m = 5,\ n = 3$.

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{行変形}} B\tilde{A} = \tilde{A}' = (A' \mid \mathbf{b}')$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & 0 & b_1' \\ & & 1 & \cdots & & 0 & \vdots \\ & 0 & & & & 1 \ \cdots & b_r' \end{pmatrix}$$

$k(1)$　　$k(2)$　　$k(r)$

r = (階段の個数)

∗ 階段の個数 r と（その位置と $k(r)$）変数の個数 n の大小関係で場合分け。

まず、最後の階段の位置 $k(r)$ の値で場合分け。

① $k(r) = n+1$.
② $k(r) \leq n$.

① $k(r) = n+1$ $(=4)$ の場合.

$$\tilde{A}' = (A' \mid b') = \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & 0 & \boxed{1} \\ & 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} = b_1' \\ \\ = b'_{r-1} \\ = b'_r \\ \\ \end{matrix}$$

このとき、連立1次方程式 $A'x = b'$ に $\boxed{0 = 1}$ が含まれるので、解は存在しない.

★ r の値がいくつであっても、$k(r) = n+1$ の場合は解が存在しない点に注意!

② $k(r) \leq n$ $(=3)$ の場合.
さらに r の値で場合分け.

2-1 $r = n$ $(=3)$ の場合.

$$\tilde{A}' = (A' \mid b') = \begin{pmatrix} 1 & & & b_1' \\ & 1 & & b_2' \\ & & 1 & b_3' \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

の形になるので、方程式の解は $x_1 = b_1'$, $x_2 = b_2'$, $x_3 = b_3'$ とただ1組に定まる.

2-2 $r < n$ $(=3)$ の場合.

(例) $\tilde{A}' = (A' \mid b') = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}' & 0 & b_1' \\ & & 1 & b_2' \\ & 0 & & \end{pmatrix}$ の形になったとしよう.
$r=2$,

この時の連立1次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}' x_2 = b_1' \\ x_3 = b_2' \end{cases}$$

個数を $n-r$ とおく。

★ (i) 階段がない列に対応する解 x_j は任意の値。

(ii) 階段がある列に対応する解 x_j は

(i) の解か b' (もしくは両方) の値によって定まる。

個数 r コ。

$n-r$ とおく。

この個数を方程式 (12.1) or (12.5) の $\boxed{\text{解の自由度}}$ という。

定義 (斉次連立1次方程式)

$Ax = 0$ …(2.8) の形の連立1次方程式を斉次連立1次方程式という。

右辺が 0。

命題 斉次連立1次方程式 $Ax=0$ は必ず解をもつ。

Proof. 拡大係数行列 $(A|0)$ を行変形で簡約階段行列に変換すると $(A'|0)$ の形になり、必ず $k(r) \leq n$ が成り立つ。よって定理 2.4 より、与方程式は必ず解をもつ。

また、実際、$x=0$ は解であることがわかる。

これを<u>自明な解</u>という。

命題 斉次連立1次方程式 $Ax=0$ …(2.8) の解の和もスカラー倍もまた解である。

Proof x_1, x_2 を方程式 (2.8) の解とし、$c \in K$ とする。このとき、

$$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0,$$
$$A(cx_1) = c(Ax_1) = c \cdot 0 = 0$$

より、x_1, x_2 の和とスカラー倍もまた解であることがわかる。

命題 斉次連立1次方程式 $Ax=0$ …(2.8) の解の自由度が $n-r$ のとき、線形独立な解が $n-r$ 個存在する。

(これらの解を方程式 (*) の<u>基本解</u>という。)

さらに、方程式 (2.8) の任意の解は、$n-r$ 個の

(次頁につづく)

(つづき)

基本解の線形結合で一意的に表される.

Proof) 方程式 (2.8) の解のうち、任意の値をとる $n-r$ 個の解を $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$ とおく.
すると、$x_{i_l} = 1$, 他を 0 としたベクトル $(l=1,\dots,n-r)$

$$\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は $n-r$ 次基本ベクトルなので、線形独立.
よって、これらに、$x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$ に依存する残りの解を加えた解をそれぞれ $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$ とおくと、これらも1次独立.

さらに、方程式 (2.8) の任意の解は、$x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$ に任意の値を代入したもの. すなわち

$$\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_{n-r} \in K$$

と、$x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}$ に依存する残りの解を加えた解であるが、

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と、$\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_{n-r}} \end{bmatrix}$ に関し、$n-r$ 個の基本解の線形結合で一意的に表される. よって、方程式 (2.8) の任意の解も、$n-r$ 個の基本解の線形結合で一意的に表される. ∎

例題2.4 の補足.

$x_3=\alpha,\ x_4=\beta$ より $\begin{cases} x_1=\alpha+10\beta \\ x_2=-2\alpha-7\beta \end{cases}$. よって

方程式の解 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+10\beta \\ -2\alpha-7\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

と表す. ∎

定理2.5 (線形従属のための十分条件)

$K=\mathbb{R}$ or $K=\mathbb{C}$. $m<n$.

(1) $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \in K^l$ がそれぞれ $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m \in K^l$ の線形結合で表される $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ は線形従属.

(2) 特に, $l<n$ ならば, $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ は常に線形従属.

Proof (1) 仮定の下で, $x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ ...(*) をみたす $(x_1,\dots,x_n)$ が $(0,\dots,0)$ 以外に存在することを示す.

$\mathbf{a}_i=\sum_{j=1}^{m} c_{ji}\mathbf{b}_j$ $(i=1,\dots,n)$ と表すとき.

$$x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}c_{ji}\mathbf{b}_j\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x_1(c_{11}\mathbf{b}_1+c_{21}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{m1}\mathbf{b}_m) \\
&\quad + x_2(c_{12}\mathbf{b}_1+c_{22}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{m2}\mathbf{b}_m) \\
&\quad + x_n(c_{1n}\mathbf{b}_1+c_{2n}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{mn}\mathbf{b}_m) \\
&= (c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n)\mathbf{b}_1 \\
&\quad + (c_{21}x_1+\cdots+c_{2n}x_n)\mathbf{b}_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + (c_{m1}x_1+\cdots+c_{mn}x_n)\mathbf{b}_m \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}c_{1j}x_j\right)\mathbf{b}_1+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{2j}x_j\right)\mathbf{b}_2+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}c_{mj}x_j\right)\mathbf{b}_m \quad \cdots(**)
\end{aligned}$$

より. $x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ を $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m$ の線形結合で表して. (*) の係数をすべて 0 にするような $(x_1,\dots,x_n)$ が $(0,\dots,0)$ 以外に存在するか否かを調べることになる.