$x_3=\alpha,\ x_4=\beta$ より $\begin{cases} x_1=\alpha+10\beta \\ x_2=-2\alpha-7\beta \end{cases}$ よって

例題 2.4 の補足.

方程式の解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+10\beta \\ -2\alpha-7\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表す. $\blacksquare$

定理 2.5 (線形従属のための十分条件) 6/7

$K=\mathbb{R}$ or $K=\mathbb{C}$. $m<n$.

(1) $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \in K^l$ がそれぞれ $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m \in K^l$ の線形結合で表される $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ は線形従属.

(2) 特に, $l<n$ ならば. $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ は常に線形従属.

Proof (1) 仮定の下で, $x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ …(*) をみたす $(x_1,\dots,x_n)$ が $(0,\dots,0)$ 以外に存在することを示す.

$$\mathbf{a}_i=\sum_{j=1}^{m} c_{ji}\mathbf{b}_j \quad (i=1,\dots,n) \text{ と表すとき.}$$

$$x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ji}\mathbf{b}_j\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x_1(c_{11}\mathbf{b}_1+c_{21}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{m1}\mathbf{b}_m) \\
&\quad + x_2(c_{12}\mathbf{b}_1+c_{22}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{m2}\mathbf{b}_m) \\
&\quad + x_n(c_{1n}\mathbf{b}_1+c_{2n}\mathbf{b}_2+\cdots+c_{mn}\mathbf{b}_m) \\
&= (c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n)\mathbf{b}_1 \\
&\quad + (c_{21}x_1+\cdots+c_{2n}x_n)\mathbf{b}_2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + (c_{m1}x_1+\cdots+c_{mn}x_n)\mathbf{b}_m \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j\right)\mathbf{b}_1+\left(\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j\right)\mathbf{b}_2+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n} c_{mj}x_j\right)\mathbf{b}_m \quad \cdots(**)
\end{aligned}$$

より. $x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ を $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m$ の線形結合で表すと. (*)の係数をすべて0にするような $(x_1,\dots,x_n)$ が $(0,\dots,0)$ 以外に存在するか否かを調べることになる.

このとき、解くべき連立1次方程式は

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j = 0, \dots,\quad \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j = 0.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{0}. \qquad \cdots (***)$$

$m < n$ より、連立方程式 $(***)$ の解の自由度は $\geq n-m$.
よって、自明でない解 $(x_1, \dots, x_n) = (d_1, \dots, d_n) \neq \mathbb{0}$
をもつ。
このとき $(*)$ は $d_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + d_n \mathbf{a}_n = \mathbb{0}$ をみたすので、
$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形従属。

(2)は、$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$ の線形結合で表されるので、(1)の証明において、
$m = l$, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ をそれぞれ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$ とおく。
これにより、(2)が示される。 ∎

◎ 定理 2.5 のポイント(意味)

(2) l ~~次~~項数ベクトルを $l+1$ コ持ってくると、それらは線形従属。

(例) $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は線形従属。 $\left(\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}\right)$

(1) $m < n < l$ とする。

l ~~次~~項数ベクトル m コ: $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ の
線形結合を n コ: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 作ると、
$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形従属。

(例) $\mathbb{R}^{\cancel{2}5} \ni \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ に対し、これらの線形結合
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は線形従属。

定義 (基底)

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in K^l$ が K^lの数ベクトル (数ベクトル) の基底

def
$\Longleftrightarrow$ ① $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立.
② $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は K^l を張る (生成する).
すなわち $\forall \mathbf{x} \in K^l$ に対して, $\exists c_1, \ldots, c_n \in K$ が存在して $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$ が成りたつ.
(K^lの任意の数ベクトルは $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で表される.)

$\blacksquare$

定理 2.6 (数ベクトル空間の基底の個数の一意性)

(1) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in K^l$ と $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in K^l$ が それぞれ K^l の基底ならば, $m = n$.
(2) 特に $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in K^l$ が K^l の基底ならば $n = l$.

Proof. (1) $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in K^l$ が K^l の基底より, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ の線形結合で表される. このとき, $n > m$ とすると, 定理 2.5 より $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形従属であることになり, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が基底である仮定に矛盾する.

逆に, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in K^l$ が K^l の基底より, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ は $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ の線形結合で表される. このとき $m > n$ とすると. 上と同様にして $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ は線形従属であることになり. 仮定に矛盾する.

以上より $m = n$ が成りたつ.

(2) 「基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_l \in K^l$ は K^lの基底である.」 ゆえに (1) より $n = l$.

$\blacksquare$

演習問題!

◎ 定理2.6のポイント(意味).

・数ベクトル空間 K^l ($l<\infty$) の基底の個数は l.
・基底の個数は基底のとり方によらない.
・数ベクトル空間を特徴づける値の一つ ⇒ $\boxed{\text{次元}}$

§2.4 行列の階数 (rank; ランク)

◎ 行列の列(基本)変形.

定義 (列基本変形, 列変形)

$A \in K^{m\times n}$, $c \in K$, $1 \le i, j \le m$ ($i \neq j$) に対し, 次の3つの変換をAの列基本変形という:

(1) Aの第i列を$c\ (\neq 0)$倍する.
(2) Aの第i列と第j列を入れ替える.
(3) Aの第$i\,(j)$列に第$j\,(i)$列のc倍を加える.

列基本変形を繰り返し施す操作を列変形という. ▨

注意 $A \in K^{m\times n}$ に, n次基本行列 (1)′ $E_i(c)$, (2)′ P_{ij}, (3)′ E_{ji} を右からかけると, それぞれAの列基本変形 (1), (2), (3) が得られる.

行基本変形では E_{ij} だったので注意!

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & c & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longleftrightarrow E_{ji} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & c & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

▨

◎ より一般的な行列の列変形.

(m,n)行列Aの列変形は, n次正方行列CをAの右側からかけることにより行う.

Aに列変形Cを施した結果(を表す行列)をBとする.
すなわち

$$B = AC.$$

このとき、

$C = (c_{ij}) \iff$ Aの第i列の c_{ij} 倍をBの第j列に加える。

ことを意味する。

(例) C：3次正方行列の場合。

$$\underset{\substack{\parallel \\ B}}{(b_1\ \ b_2\ \ b_3)} = \underset{\substack{\parallel \\ A}}{(a_1\ \ a_2\ \ a_3)}\ \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \text{第1列} \\ \text{第2列} \\ \text{第3列} \end{array}$$

Aの

第1列　第2列　第3列

Bの

$$b_j = c_{1j}a_1 + c_{2j}a_2 + c_{3j}a_3$$

$$C = \begin{pmatrix} \times & 2 & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$$ のとき、$(c_{12} = 2)$

Aの第1列の2倍をBの第2列に加える。

■ 行列の階数標準形と階数 (rank)

定理2.7 (行列の階数標準形)

$\forall A \in K^{m\times n}$ に対し、$\exists B \in K^{m\times m}$, $\exists C \in K^{n\times n}$：ともに正則。
s.t.
$$BAC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad r = \min\{m, n\}.$$

Proof のポイント

① Aに対し、定理2.1により、$B \in K^{m\times m}$：正則行列が存在して、BAが簡約階段行列になる。

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & \times \cdots \times & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \\ & & 1 & \times\times\cdots & 0 & & \vdots & \\ & & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & 1 & \times \cdots \times \\ & O & & & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ \\ \end{array}$$

$$\hat{k}(1) \qquad \hat{k}(2) \qquad \hat{k}(3) \quad \cdots \quad \hat{k}(r) \qquad (r \leq n).$$

② BAに列の入れ替えを繰り返し施すことにより、第 $k(1), \ldots, k(r)$ 列をそれぞれ第$1, \ldots, r$列にもってくることができる。

$$BAC_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \cdots & & r & r+1 & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \cdots \\ & 1 & 0 & 0 & \times & \times & \cdots \\ & & 1 & 0 & \times & \times & \cdots \\ & & & \ddots & \times & \times & \cdots \\ & & & 1 & \times & \times & \cdots \\ & O & & & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ r \\ \\ \end{matrix}$$

このステップでの列変形をまとめて行列 C_1 で表す。
このとき、BAC_1 の先頭の (r,r) ブロックは E_r であることに注意する。

③ BAC_1 の第1列,…,第 r 列を用いて、第 $r+1$ 列から第 n 列までの非零成分を消去する。

(i,j) 成分

c_{ij} ($1 \le i \le r$, $r+1 \le j \le n$) に対し、第 i 列の $-c_{ij}$ 倍を第 j 列に加えることで消去できる。
これは基本行列 $E_{ij}(c_{ij})$ を右からかける

ことと同値である。

このステップでの列変形をまとめて行列 C_2 で表す。このとき、

$$BAC_1C_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & n-r\text{列} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \}\ m-r\text{行}. \end{matrix}$$

C_1, C_2 は正則行列であるので、$C = C_1C_2$ とおくと C もまた正則行列。よって、題意をみたす正則行列 B, C を構成できたことになる。

∎

定理 2.8 (階数標準形の一意性)

$\forall A \in K^{m\times n}$ に対し、$\exists B, B' \in K^{m\times m}$ (正則), $\exists C, C' \in K^{n\times n}$ (正則)

s.t. $BAC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $B'AC' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$

とすると $r = r'$.

Proof ① $\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B'AC' = B'B^{-1}(BAC)C^{-1}C'$

$$= B'B^{-1}\underline{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}C'} .$$

ここで、(☆)の右辺を取り出すと $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}C' = \begin{pmatrix} F \\ \hline 0 \end{pmatrix} \}\, r$行.

(∵ $C^{-1}C'$は列変形なので、下の $m-r$ 行には影響を及ぼさない。)

そこで、$\begin{pmatrix} F \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ に行変形を施して簡約階段行列にしたものを $\begin{pmatrix} F' \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ とする。ところが $\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は(☆)の左辺の簡約階段行列であり、同じ(等しい)行列の簡約

$$\boxed{\therefore\ BB'^{-1} \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}C' \qquad (☆)}$$

階段行列は一致するので、Fの行数 r が $E_{r'}$ の行数 r' を下回ることはない。ゆえに $r \geq r'$.

~~今度は(☆)の右辺を取り出すと~~ $\cancel{BB'^{-1}\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (F' \mid 0)}$ ~~r'列~~

~~(∵ BB'^{-1} は行変形なので、右の $n-r'$ 列には影響を及ぼさない。)~~

~~そこで $(F' \mid 0)$ に行変形を施して~~

② $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BAC = BB'^{-1}(B'AC')C'^{-1}C$

$$= BB'^{-1}\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C'^{-1}C .$$

$$\therefore\ B'B^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C'^{-1}C . \qquad (☆☆)$$

ここで (☆☆) の右辺を取り出すと $\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C'^{-1} C = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \}\, r'$行.

(∵ $C'^{-1}C$ は列変形なので、下の $m-r'$ 行には影響を及ぼさない。)

そこで $\begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$ に行変形を施して簡約階段行列にしたものを $\begin{pmatrix} G' \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。ところが $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は (☆☆) の左辺の簡約階段行列であり、同じ(等しい)行列の簡約階段行列は一致するので、G の行数 r' が E_r の行数 r を下回ることはない。ゆえに $r' \geq r$.

よって、①, ② より $r = r'$ を得る。 ▨

☆ 定理2.8より、Aの階数標準形に現われる r は B, C のとり方によらず、A のみによって定まることがわかる。

定義 (行列の階数 (ランク; rank))

$A \in K^{m\times n}$ に対し、適当な正則行列 $B \in K^{m\times m}$, $C \in K^{n\times n}$ による行変形・列変形を施して得られる階数標準形 $BAC = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に現われる r を行列 A の階数 (ランク) といい、$\mathrm{rank}\, A$ で表す。 ▨

命題 $A \in K^{m\times n}$ のとき、$\mathrm{rank}\, A \leq \min\{m, n\}$.

Proof. A の対角成分の長さは $\min\{m, n\}$ であり、A の階数標準形を $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、r は A の対角成分の長さを超えることはない。ゆえに

$$r = \mathrm{rank}\, A \leq \min\{m, n\}.$$ ▨