このとき、解くべき連立1次方程式は

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j = 0,\ \dots,\quad \sum_{j=1}^{n} c_{mj}x_j = 0.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{0}. \quad \cdots (***)$$

$m < n$ より、連立方程式 $(***)$ の解の自由度は $\geq n-m$.
よって、自明でない解 $(x_1, \dots, x_n) = (d_1, \dots, d_n) \neq \mathbb{0}$ をもつ.
このとき $(*)$ は $d_1 \mathbb{a}_1 + \cdots + d_1 \mathbb{a}_n = \mathbb{0}$ をみたすので、
$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ は線形従属.

(2)は、$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ は基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_l$ の線形結合で表されるので、(1)の証明において、$m = l$, $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$ をそれぞれ $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_l$ とおくことにより、(2)が示される. ∎

◎ 定理 2.5 のポイント (意味)

(2) l ~~次~~項 数ベクトルを $l+1$ コ 持ってくると、それらは 線形従属.

(例) $\mathbb{R}^2 \ni \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ は線形従属.
$\left(\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}\right)$

(1) $m < n < l$ とする.

l ~~次~~項 なベクトル mコ: $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$ の線形結合を nコ: $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ 作ると、
$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n$ は線形従属.

(例) ~~$\mathbb{R}^{4}$ ∋ $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$. n コずつ. これらの線形結合 $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ は線形従属.~~

$m=1 < n=2 < l=3$ のとき. $\mathbb{R}^3 \ni \mathbb{b}_1$ をとり,
$\mathbb{a}_1 = c_1 \mathbb{b}_1$, $\mathbb{a}_2 = c_2 \mathbb{b}_1$ とすると.
$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$ は線形従属.

ここで (☆☆) の右辺を取り出すと $\begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix} C'^{-1}C = \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} \} r'$行.

(∵ $C'^{-1}C$ は列変形なので、下の $m-r'$ 行には影響を及ぼさない。)

そこで $\begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix}$ に行変形を施して簡約階段行列にしたものを $\begin{pmatrix} G' \\ O \end{pmatrix}$ とする。ところが $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ は (☆☆) の左辺の簡約階段行列であり、同じ (等しい) 行列の簡約階段行列は一致するので、G の行数 r' が E_r の行数 r を下回ることはない。ゆえに $r' \geqq r$.

よって、①, ② より $r = r'$ を得る。 ▨

☆ 定理 2.8 より、A の階数標準形に現われる r は B, C のとり方によらず、A のみによって定まることがわかる。

6/11

定義 (行列の階数 (ランク; rank))

$A \in K^{m\times n}$ に対し、適当な正則行列 $B \in K^{m\times m}$, $C \in K^{n\times n}$ による行変形・列変形を施して得られる階数標準形 $BAC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に現われる r を行列 A の<u>階数 (ランク)</u> といい、rank A で表す。 ▨

命題

$A \in K^{m\times n}$ のとき、rank A $\leqq \min\{m, n\}$.

(Proof) A の対角成分の長さは $\min\{m, n\}$ であり、A の階数標準形を $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすると、r は A の対角成分の長さを超えることはない。ゆえに

$$r = \text{rank}\,A \leqq \min\{m, n\}.$$ ▨

注意　系2.9において、$B = E_m$, $C = E_n$ でもよい。

系2.9　(rankの正則行列の積による不変性)

$\forall A \in K^{m\times n}$, $\forall B \in K^{m\times m}$ (正則), $\forall C \in K^{n\times n}$ (正則) に対し、$\mathrm{rank}\, BAC = \mathrm{rank}\, A$ が成り立つ。

Proof　A に対し、$\exists B', B'' \in K^{m\times m}$ (正則), $\exists C', C'' \in K^{n\times n}$ (正則)

s.t.

$$B'(BAC)C' = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdots ①, \quad B''AC'' = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdots ②.$$

ところが $B'(BAC)C' = (B'B)A(CC')$ かつ $B'B$, CC' は正則より、①は行列 A の階数標準形とみなすことができる。定理2.8より行列 A の階数標準形は一意的に表されるから $r = s$。ゆえに $\mathrm{rank}\, BAC = \mathrm{rank}\, A$. ∎

系2.10　(転置によるrankの不変性)

$\forall A \in K^{m\times n}$ に対し、$\mathrm{rank}\, {}^tA = \mathrm{rank}\, A$ が成り立つ。

Proof　$BAC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ならば $BAC = {}^tC\, {}^tA\, {}^tB$ より

$${}^tC\, {}^tA\, {}^tB = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in K^{n\times m}.$$

定理1.5より ${}^tC$, ${}^tB$ は正則行列。ゆえに $\mathrm{rank}\, {}^tA = r = \mathrm{rank} A$. ∎

系2.11　(行列の積のrank)

$\forall A \in K^{m\times n}$, $\forall B \in K^{l\times m}$, $\forall C \in K^{n\times k}$ に対し、

(1) $\mathrm{rank}\, BA \leq \mathrm{rank}\, A$.

(2) $\mathrm{rank}\, AC \leq \mathrm{rank}\, A$

が成り立つ。

Proof　(2)　A に対し、$\exists B_1 \in K^{m\times m}$ (正則), $\exists C_1 \in K^{n\times n}$ (正則)

s.t. $B_1AC_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$　(すなわち $\mathrm{rank}\, A = r$)

とすると、系2.9より

$\mathrm{rank}\, AC = \mathrm{rank}\, B_1 AC = \mathrm{rank}\, (B_1 A)(C_1 C_1^{-1}) C$

$= \mathrm{rank}\, (B_1 A C_1)(C_1^{-1} C) = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (C_1^{-1} C)$

$= \mathrm{rank} \left(\begin{array}{c} C' \\ \hline O \end{array} \right)$.

ここで、$(E_r\ O) \in K^{r \times n}$, $C_1^{-1} C \in K^{n \times k}$ より、

$C'' = (E_r\ O)(C_1^{-1} C)$ とおくと、E_r の非ゼロの行の個数は r であるので、C'' の非ゼロの行の個数は r を上回ることはない。
よって、行列 $\begin{pmatrix} C' \\ O \end{pmatrix}$ の階数標準形を $\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすると、$s = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} C' \\ O \end{pmatrix} \leq r = \mathrm{rank}\, A$.

(1) (2) より $\mathrm{rank}\, BA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{系2.10}}}{=} \mathrm{rank}\, {}^tA\, {}^tB \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{\leq} \mathrm{rank}\, {}^tA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{系2.10}}}{=} \mathrm{rank}\, A$. ∎

系 2.12 (正~~方~~則行列の rank)

$A \in K^{n \times n}$ のとき、$\mathrm{rank}\, A = n \iff A$ は正則行列。

Proof ($\Longrightarrow$) $\mathrm{rank}\, A = n$ より $\exists\, B, C \in K^{n \times n}$ (正則)
s.t. $BAC = E_n$. $\therefore A = B^{-1} C^{-1}$.
B, C は正則より B^{-1}, C^{-1} もまた正則。正則行列の積はまた正則であるので、A もまた正則。

($\Longleftarrow$) A は正則より、A^{-1} もまた正則。E_n も正則であるから、$A^{-1} A E_n = E_n$ より $\mathrm{rank}\, A = n$. ∎

系 2.13 (左逆行列は逆行列)
(右)

$A \in K^{n \times n}$ のとき、(1) $B \in K^{n \times n}$ が $BA = E_n$ をみたす (すなわち、B は A の「左」逆行列) $\Longrightarrow AB = E_n$, $B = A^{-1}$, が成り立つ。

(2) $B \in K^{n \times n}$ が $AB = E_n$ をみたす (B は A の「右」逆行列) $\Longrightarrow BA = E_n$, $B = A^{-1}$ が成り立つ。

★ Bは正則とは限らない。(実際には正則だが。)

Proof (1) 系2.11 (1) より $n = \mathrm{rank}\, E_n = \mathrm{rank}\, BA \le \mathrm{rank}\, A \le n$ より、$\mathrm{rank}\, A = n$.
ゆえに 系2.12 より Aは正則。ノート p.50 の 命題 より、逆行列は一意的であるので $B = A^{-1}$.

(2) 系2.11 (2) より、$n = \mathrm{rank}\, E_n = \mathrm{rank}\, AB \le \mathrm{rank}\, A \le n$ より $\mathrm{rank}\, A = n$. あとの議論は(1)と同じ。 ∎

定理2.14 (rankと線形独立性) $A \in K^{m\times n}$.

(1) rank A は A の線形独立な列ベクトルの個数の最大値に等しい。

(2) rank A は A の線形独立な行ベクトルの個数の最大値に等しい。

Proof (1) Aの列ベクトルの線形独立性は、行変形しても(正則行列を左からかけるだけだから)変わらない。

$A = (a_1, \dots, a_n) = (a_{ij})$ とする。$a_1, \dots, a_r$ $(r \le n)$ が線形独立な列ベクトルの最大個数の組み合わせとする。
このとき、$a_1, \dots, a_r$ に同じ行変形を施した列ベクトル $a_1', \dots, a_r'$ もまた線形独立。

∵ $a_1, \dots, a_r$ が線形独立より、$c_1, \dots, c_r \in K$ に対し、

$$c_1 a_1 + \cdots + c_r a_r = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

このとき、$\forall i = 1, \dots, m$ に対し

$$c_1 a_{i1} + \cdots + c_r a_{ir} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

が成り立つ。よって、以下の行基本変形により、線形独立性は変わらない。

① 第i行のc倍：$(c \ne 0)$

$$c_1 (c a_{i1}) + \cdots + c_r (c a_{ir}) = c (c_1 a_{i1} + \cdots + c_r a_{ir}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

② 第i行と第j行の交換。
線形独立の関係式は変わらない。

③ 第i行に第j行のc倍を加える.

$$c_1(a_{i1}+ca_{j1})+\cdots+c_r(a_{ir}+ca_{jr})$$
$$=c_1a_{i1}+\cdots+c_ra_{ir}+c(c_1a_{j1}+\cdots+c_ra_{jr})=0$$

$\Rightarrow$ $c_1a_{i1}+\cdots+c_ra_{ir}=0$ かつ $c(c_1a_{j1}+\cdots+c_ra_{jr})=0$

$\Rightarrow$ $c_1=\cdots=c_r=0$.

よって、Aの列ベクトルの線形独立性は、Aを簡約階段行列に変換して調べればよい。
このとき、Aの列ベクトルで線形独立となるものの最大個数の組は、第$k(j)$列 $(j=1,\dots,r)$ の r コの基本ベクトルである。

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots \\ & 1 \cdots & 0 \cdots & \cdots \\ & & 1 \cdots & \vdots \quad \cdots \\ & & \ddots & 0 \cdots \\ 0 & & & 1 \cdots \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ k(1) & < & k(2) & < & k(3) & <\cdots & k(r) \end{matrix}$$

ところが、簡約階段行列から階段標準形への変換は、これら r コの基本ベクトルを用いた列消去によって求まるので、$\mathrm{rank}\,A=r$.

ゆえに主張が成り立つ.

(2) Aの行ベクトルは ${}^tA$ の列ベクトル. $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,{}^tA$.
よって、${}^tA$ の列ベクトルを考えて (1) を適用させればよい. □

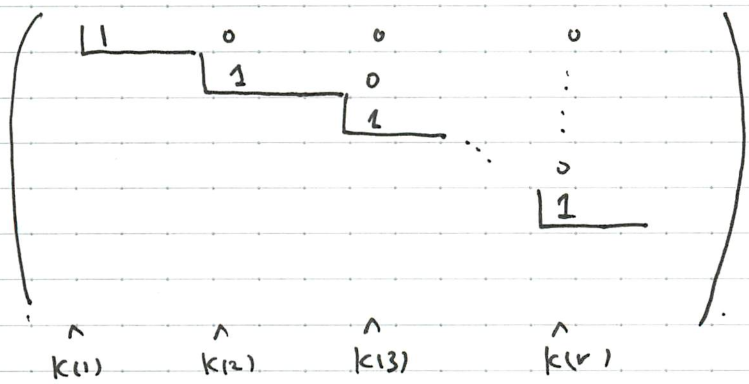
定理 2.15 (連立1次方程式の解の存在定理)

連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ (2.2) の拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対し、以下が成り立つ.

(1) 方程式 (2.2) が解をもつ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,(A\,|\,\boldsymbol{b})$.
このときの解の自由度は $n-\mathrm{rank}\,A$.

(2) 方程式 (2.2) が解をもたない $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A<\mathrm{rank}\,(A\,|\,\boldsymbol{b})$.

Proof) $A \in K^{m \times n}$ とする. 方程式 (2.2) の拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \mid \mathbb{b})$ を行変形で簡約階段行列



にもつと $\tilde{A}' = (A' \mid \mathbb{b}')$ とおく. このとき,
定理 2.14 の証明より $\operatorname{rank} \tilde{A}' = r$.
また, rank は正則行列の積で不変であるから,
$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'$, $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} \tilde{A}'$.

ここで, 定理 2.4 の証明より以下のことがわかる.

(2) 方程式 (2.2) が解をもたない $\iff k(r) = n+1$
$\iff \operatorname{rank} A' < \operatorname{rank} \tilde{A}'$
$\iff \operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} (A \mid \mathbb{b})$.

(1) 方程式 (2.2) が解をもつ $\iff k(r) < n+1$
$\iff \operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} \tilde{A}'$
$\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} (A \mid \mathbb{b})$.
このとき, 解の自由度は $n - r = n - \operatorname{rank} A$. ■

定理 2.16 (連立1次方程式の解の一意性)

連立1次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ (2.2) の拡大係数行列 $(A \mid \mathbb{b})$ に対し,
方程式 (2.2) がただ一組の解をもつ
$\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A \mid \mathbb{b}) = n$.