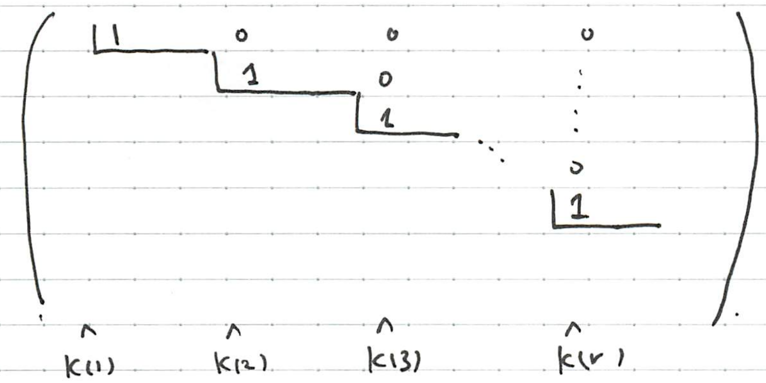
Proof $A \in K^{m\times n}$ とする。方程式 (2.2) の拡大係数行列 $\tilde{A} = (A|b)$ を行変形で簡約階段行列



にしたものを $\tilde{A}' = (A'|b')$ とおく。このとき、
定理2.14の証明より $\mathrm{rank}\,\tilde{A}' = r$.
また、rank は正則行列の積で不変であるから、
$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,A'$, $\mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,\tilde{A}'$.

ここで、定理2.4の証明より以下のことがわかる。

(2) 方程式 (2.2) が解をもたない $\Longleftrightarrow k(r) = n+1$
$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,A' < \mathrm{rank}\,\tilde{A}'$
$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,(A|b)$.

(1) 方程式 (2.2) が解をもつ $\Longleftrightarrow k(r) < n+1$
$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,A' = \mathrm{rank}\,\tilde{A}'$
$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,(A|b)$.
このとき、解の自由度は $n - r = n - \mathrm{rank}\,A$.

定理2.16 (連立1次方程式の解の一意性) 6/14

連立1次方程式 $Ax = b$ (2.2) の拡大係数行列 $(A|b)$ に対し、
方程式 (2.2) がただ一組の解をもつ
$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,(A|b) = n$.

Proof) 定理2.15の証明の議論を続ける.

定理2.15 (1)より 方程式(2.2)が解をもつ
$\iff$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbb{b})$.

さらに、定理2.4の証明より、方程式(2.2)がただ一組の解をもつ $\iff$ $r = \mathrm{rank}(A \mid \mathbb{b}) = n$ より、主張が成り立つ. $\blacksquare$

定理2.17 (斉次連立1次方程式の解)

斉次連立1次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ (2.8) が非自明解(${\mathbb{x} \neq \mathbb{0}}$)をもつ
$\iff$ $\mathrm{rank}\,A < n$. このとき、$(n - \mathrm{rank}\,A)$ 個の解からなる基本解が存在する.

Proof) ☆ 斉次連立1次方程式(2.8)は必ず解をもつことに注意. $\mathrm{rank}\,A \leq n$.

定理2.16より、方程式(2.8)がただ一組の解をもつ
$\iff$ $\mathrm{rank}\,A = n$. このときの解は自明な解 $\mathbb{x} = \mathbb{0}$.
よって、非自明解をもつ $\iff$ $\mathrm{rank}\,A < n$.

ノートp.65の命題より、方程式(2.8)の基本解の個数は解の自由度に等しい. よって 定理2.15 (1) より、基本解の個数は $n - \mathrm{rank}\,A$. $\blacksquare$

§2.5. 定理2.8の別証.

Proof) $r \neq r'$ とする. $r < r'$ として一般性を失わない (もし $r \geq r'$ ならば、BAC と $B'AC'$ を入れ換えればよい). このとき、$B'B^{-1}$, $C'^{-1}C$ を次のようにブロックに分ける. (B', B, C, C' はいずれも正則より、$B'B^{-1}$, $C'^{-1}C$ もともに正則であることに注意.)

$$B'B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & r'-r & m-r' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ r \\ r'-r \\ m-r' \end{array}, \quad C'^{-1}C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & r'-r & n-r' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ r \\ r'-r \\ n-r' \end{array}.$$

$$\begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix} = B'B^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} C^{-1}C' \qquad (教科書\ p.49)$$

より

$$B'B^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix} C'^{-1}C$$

ゆえに

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & & \\ & O & \\ & & O \end{pmatrix}}_{\shortparallel} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & & \\ & E_{r'-r} & \\ & & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}}_{\shortparallel}$$

$$\begin{array}{c} r \\ r'-r \\ m-r' \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} B_{11} & O & O \\ B_{21} & O & O \\ B_{31} & O & O \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} r & r'-r & n-r' \end{matrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ O & O & O \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} r & r'-r & n-r \end{matrix}\end{array}\begin{array}{c} r \\ r'-r \\ m-r' \\ \\ \end{array} \qquad (1)$$

(1)より $C_{12}=O$, $C_{13}=O$, $C_{22}=O$, $C_{23}=O$
このとき、$C'^{-1}C$ は正則でない。

$$C'^{-1}C = \begin{pmatrix} C_{11} & O & O \\ C_{21} & O & O \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

行変形を用いて を簡約階段行列に変換する際、まず第2行ブロックと第3行ブロックを入れ換えると

$$\begin{array}{c} r \\ n-r' \\ r'-r \end{array}\begin{pmatrix} C_{11} & O & O \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{21} & O & O \end{pmatrix}.$$

これを行 により、簡約階段行列にすると

$$\begin{array}{c} r \\ n-r' \\ r'-r \end{array}\begin{pmatrix} 1\ \cdots & 0 & 0 \\ & 1\ \cdots & 1\ \cdots \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

となり、いちばん下の $r'-r$ 行のブロックが零行列となる。

よって、これは $C'^{-1}C$ の正則性に反する。 ∎

第3章：行列式

§3.1 はじめに

§3.1.1 2次の正方行列の行列式

定義3.1 (1次と2次の正方行列の行列式)

$(a_{11}) \in K^{1\times 1}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

の行列式 (determinant) を以下の通り定める.

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

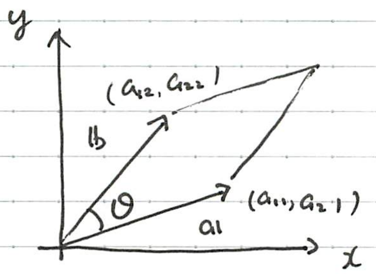
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

青矢印：$+$

赤矢印：$-$ ∎

◎ 2次正方行列の行列式の意味.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ は，平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形の「符号つき」面積を表す.



(1) まず，幾何的な面積を考える.
(面積を S' とおく.
右図の平行四辺形の

$$S' = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\theta \quad (\sin\theta \geq 0) \quad \text{より},$$

$$\begin{aligned}
S'^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\theta) \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \underbrace{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos^2\theta}_{\substack{\shortparallel \\ (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}} \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 \\
&= a_{11}^2a_{12}^2 + a_{11}^2a_{22}^2 + a_{12}^2a_{21}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 \\
&\quad - a_{11}^2a_{12}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} - a_{21}^2a_{22}^2
\end{aligned}$$

$$= a_{11}{}^2 a_{22}{}^2 - 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} + a_{12}{}^2 a_{21}{}^2$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 .$$

$$\therefore \quad S' = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| .$$

(2) 次に、2つの平面ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、「符号つき面積」 $S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ を次のように定める：

(i) $S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \pm S'$.

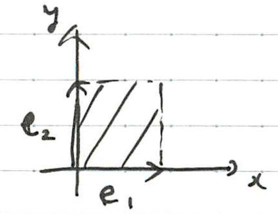
(ii) S の符号は、$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角度 θ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ によって定める。

$\mathbb{a}$ から $\mathbb{b}$ に向かって原点の周りを回る方向が…

- 反時計回り $\Rightarrow$ $+$.
- 時計回り $\Rightarrow$ $-$.

このとき、$S(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ は以下の性質をみたす。

① 基本ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し、$S(e_1, e_2) = 1$.



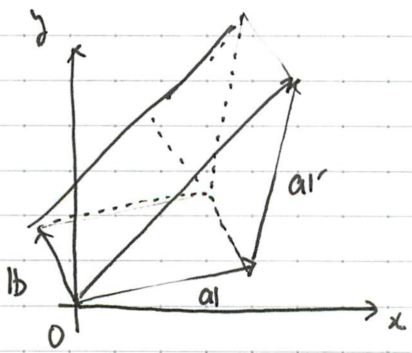
反対称性

② $S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -S(\mathbb{b}, \mathbb{a})$.

特に $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ のとき、$S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0$.

($\because$ $S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = -S(\mathbb{a}, \mathbb{a})$ より
$2S(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0$.)

③ $S(\mathbb{a} + \mathbb{a}', \mathbb{b}) = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + S(\mathbb{a}', \mathbb{b})$,



同様に
$S(\mathbb{a}, \mathbb{b} + \mathbb{b}') = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + S(\mathbb{a}, \mathbb{b}')$.