$$= a_{11}^2 a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} + a_{12}^2 a_{21}^2$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2.$$

$$\therefore \quad S' = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|.$$

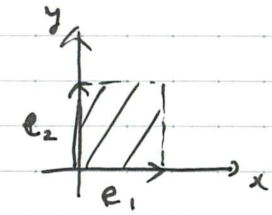
(2) 次に、2つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、「符号つき面積」$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を次のように定める：

(i) $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \pm S'$.

(ii) S の符号は、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角度 θ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ によって定める。
$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって原点の周りを回る方向が…
- 反時計回り $\Rightarrow$ $+$.
- 時計回り $\Rightarrow$ $-$.

このとき、$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は以下の性質をみたす。

① 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し、$S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

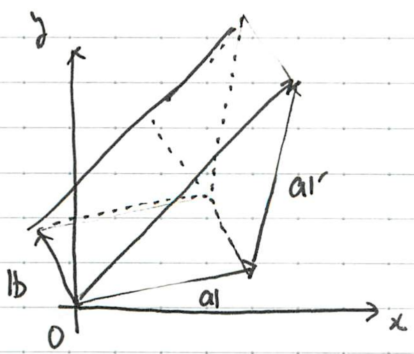


反対称性

② $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.
特に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ のとき、$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$.
(∵ $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = -S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ より
$2S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$.)

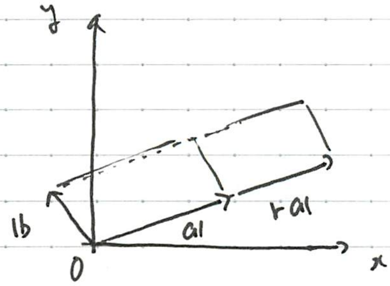
6/18

③ $S(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$,



同様に
$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$.

④ $r \in \mathbb{R}$ に対し $S(r\mathbf{a}, \mathbf{b}) = rS(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = S(\mathbf{a}, r\mathbf{b})$.



③④：2重線形性 という。

これらの性質を用いて $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を計算すると：

$$
\begin{cases}
\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2. \\
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2
\end{cases}
$$
より.

$$
\begin{aligned}
S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= S(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \mathbf{b}) \\
&= a_{11} S(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + a_{21} S(\mathbf{e}_2, \mathbf{b})
\end{aligned}
$$

$$= a_{11} S(\mathbf{e}_1, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + a_{21} S(\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$

$$= a_{11}a_{12}\underbrace{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}_{=0} + a_{11}a_{22}\underbrace{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}_{=1} + a_{21}a_{12}\underbrace{S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}_{=-1} + a_{21}a_{22}\underbrace{S(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}_{=0}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

さて、一般の n次正方行列に対して、この量（行列式）はどのように定義できるのか？そのために「置換」と呼ばれる操作（計算）を次から導入する。

§3.2 置換

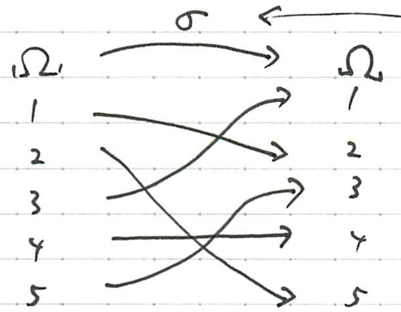
◎ 置換とは

・集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.

Ω の元 i から j への対応づけ.

(例) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\Omega \to \Omega$ の対応を σ で表す.

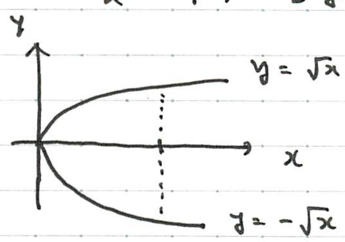


・σ のもつ性質

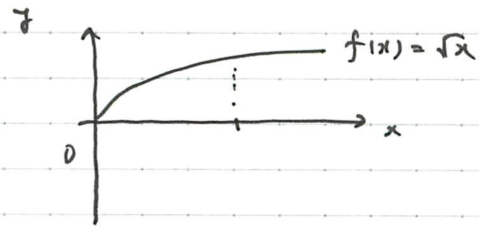
① σ は写像: σ は $\forall i \in \Omega$ に対して ある $j \in \Omega$ を ただ1つ対応づける

☆ $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ で写像でない例:

$x \mapsto$ 2乗すると x になる数 (x の平方根)



写像でない.



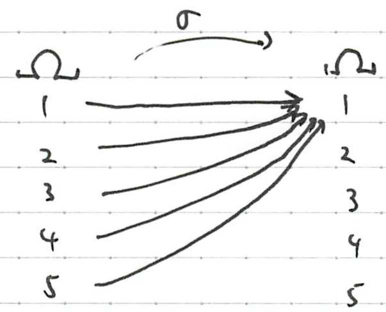
$f(x) = \sqrt{x}$ とおくと, $f(x)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ から $\mathbb{R}$ への写像.

② σ は全射(上への写像): どの $j \in \Omega$ にも ある $i \in \Omega$ から矢印が降ってくる. すなわち $j = \sigma(i)$.

定義(写像) f が A から B への写像 $\overset{\text{def}}{\iff}$ f が $\forall i \in A$ に対して $j \in B$ をただ一つ対応づける. (これを $f : A \to B$ とかく.) □

<u>定義</u>(全射) $f: A \to B$ が全射 $\overset{def}{\iff}$ $\forall b \in B$ に対し、
$\exists a \in A$ s.t. $b = f(a)$. □

★ σ が全射でない例：



$\sigma(1)=\sigma(2)=\sigma(3)=\sigma(4)=\sigma(5)$
$=1$.

③ σ は単射(1対1写像)：$i, j \in \Omega$ が $i \neq j$ ならば
i と j は同じ数字へは移らない。すなわち
$\sigma(i) \neq \sigma(j)$.

<u>定義</u>(単射) $f: A \to B$ が単射 $\overset{def}{\iff}$
$i, j \in A$ に対し、$i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$.
(同値な条件として) $f(i)=f(j) \Rightarrow i=j$. □

★ σ が単射でない例：(上の全射でない例は、
単射でない例でもある)

④ ①～③より、σ は全単射：全射かつ単射.

<u>定義</u>(全単射) $f: A \to B$ が全単射
$\overset{def}{\iff}$ f は全射かつ単射. □

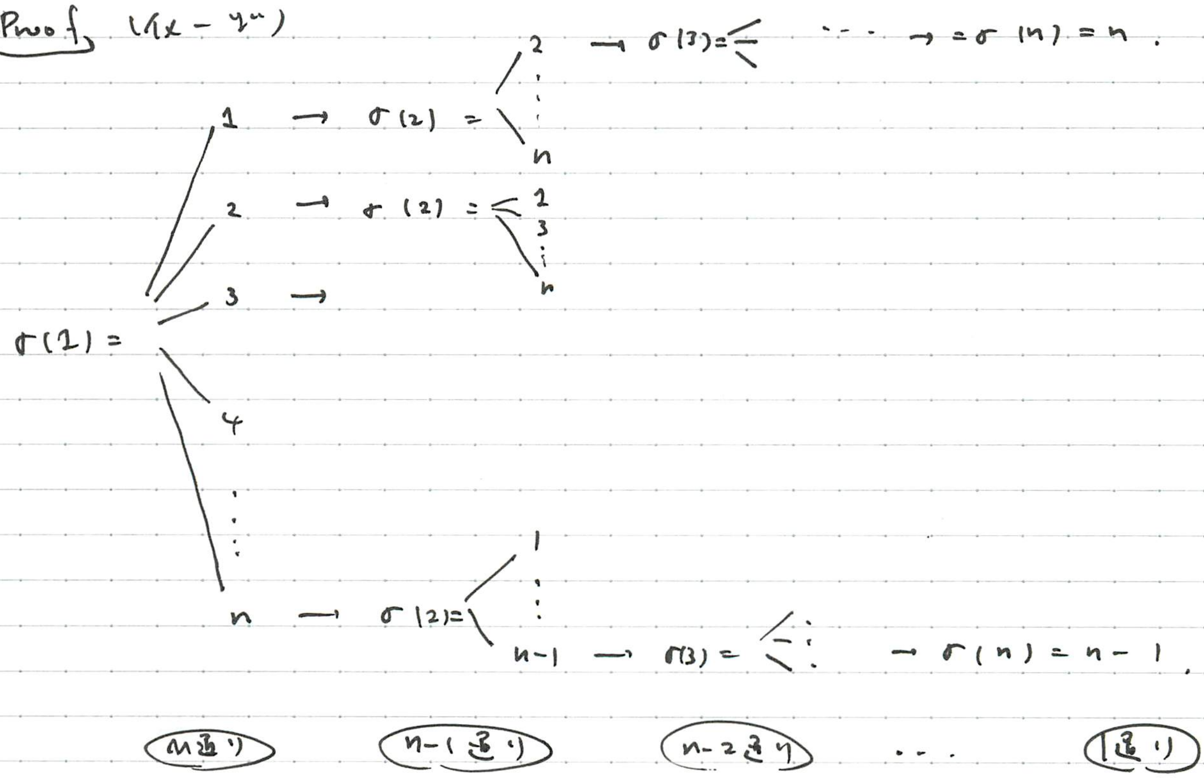
• σ を「置換」という。

<u>定義3.2</u> (置換) $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、
全単射 $\sigma: \Omega \to \Omega$ を Ω 上の<u>置換</u>とよぶ。

Ω 上の置換全体の集合 (Ω の対称群) を
S_Ω、もしくは Ω の元の個数 n をとって S_n で
表す。□

補題 3.1 (置換の個数) $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ の置換の個数は $n(n-1)\cdots 1 = n!$ である.

Proof (イメージ)



より、すべての置換の個数は $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$. □

▨ 置換の表示法.

・通常の表示:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

(ノート p.85 の例: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$)

定義 (恒等置換) 数字を1つも動かさない置換を<u>恒等置換</u>とよび、1_Ω で表す.

$$1_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

□

NO. 88

DATE 6 17 2013

・巡回表示。

1つの数字から出発して、σによって数字を移しながらもとの数字に戻る数字の列をカッコで囲んだ表し方。

（ノート p.85の例： $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の巡回表示。

σに1を与えると、$1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1$ で1に戻ってくるので、今現われた数字を現われた順に並べてカッコで囲む。

(1 2 5 3)

次に、残った4はσで他の数字に移らないので

(4)

と表す。

以上で現われた数字の列を左から順に並べると、σの巡回表示は、(1 2 5 3)(4) となる。

なお、数字1コからなる列は省略してもよい。）

※ 恒等置換 1_n を巡回表示しようとすると、数字1コからなる列しか現れないので、それらの代表として (1) で表す。

定義（巡回置換）置換σが巡回置換

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ σの巡回表示がただ1組だけの（カッコで囲んだ）数字の列で表される。 ■