・巡回表示。
1つの数字から出発して、σによって数字を移しながらもとの数字に戻る数字の列をカッコで囲んで表し方。

（ノートp.85の例： $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の巡回表示。

σに1を与えると、$1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1$ で1に戻ってくるので、今現われた数字を現われた順に並べてカッコで囲む。

$(1\ 2\ 5\ 3)$ ← これを「サイクル」とよび、数字の個数をサイクルの長さという。

次に、残った4はσで他の数字に移らないので

(4)

と表す。
以上で現われた数字の列を左から順に並べると、σの巡回表示は、$(1\ 2\ 5\ 3)(4)$ となる。
なお、数字1つからなる列は省略してもよい。）

※ 恒等置換 1_n を巡回表示しようとすると、数字1つからなる列しか現れないので、それらの代表として (1) で表す。

定義（巡回置換） 置換σが巡回置換
$\overset{def}{\iff}$ σの巡回表示がただ1組だけの（カッコで囲んだ）数字の列で表される。
また、巡回置換に現われる数字の列の個数を巡回置換の長さという。 ☒

6/21

§3.2.1 偶置換と奇置換

◎ 置換の積

定義（置換の積） σ, φ（ファイ）$\in S_n$ とする。このとき、σとφの積 $\sigma \circ \varphi \in S_n$ を $(\sigma \circ \varphi)(i) = \sigma(\varphi(i)),\ i = 1, 2, \ldots, n$ によって定める。 ☒

教科書 p.95, 例題 3.13 参照.

注意 (1) $\sigma, \varphi \in S_n$ のとき. σ と φ は $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ から Ω への全単射. このとき. $\sigma \circ \varphi$ も Ω から Ω への全単射. ゆえに $\sigma \circ \varphi \in S_n$.

(2) σ と φ の積 $\sigma \circ \varphi$ によって Ω の数字を移すときは. まず φ によって数字 i を $\varphi(i)$ に移し. ついで σ によって数字 $\varphi(i)$ を $\sigma(\varphi(i))$ に移す (次の例題を参照).

例題 教科書 p.66. 問題 3.1 の (1) と (2) の置換

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & \cancel{4}\,3 & \cancel{3}\,4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

に対し. 積 $\sigma \circ \varphi$ を求める.

$$\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & \cancel{4}\,3 & \cancel{3}\,4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(\sigma \circ \varphi)(1) = \sigma(\varphi(1)) = \sigma(3) = \cancel{3}\,4$.
$(\sigma \circ \varphi)(2) = \sigma(\varphi(2)) = \sigma(4) = 2$.
$(\sigma \circ \varphi)(3) = \sigma(\varphi(3)) = \sigma(5) = 1$.
$(\sigma \circ \varphi)(4) = \sigma(\varphi(4)) = \sigma(1) = 5$.
$(\sigma \circ \varphi)(5) = \sigma(\varphi(5)) = \sigma(2) = \cancel{4}\,3$.

ゆえに $\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{3}\,4 & 2 & 1 & 5 & \cancel{4}\,3 \end{pmatrix}$.

ついでに $\sigma \circ \varphi$ の巡回表示も求めると

$1 \to 3 \to 1$ より $(1, 3)$, …①
$2 \to 2$ より (2), ← 省略可.
$4 \to 5 \to 4$ より $(4, 5)$. …②

①③ より、$\sigma \circ \varphi$ の巡回表示は $\sigma \circ \varphi = (1, 3)(4, 5)$. ☒

注意 一般に $\sigma \circ \varphi$ と $\varphi \circ \sigma$ は等しいとは限らない. すなわち σ と φ は可換とは限らない. (σ と φ のとり方によっては可換な場合も存在する). ☒

補題 3.2 (結合律) 置換の積は結合律をみたす。
すなわち、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ のとき、
$$(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3).$$

Proof $^\forall i = 1, \dots, n$ に対して考える。

(左辺) $((\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3)(i) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(\sigma_3(i))$
$= \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(i)))$.

(右辺) $= (\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3))(i) = \sigma_1((\sigma_2 \circ \sigma_3)(i))$
$= \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(i)))$. $=$ (左辺)

がすべての i について成り立つ。ゆえに、$(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ と $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ は置換として等しい。 ▨

★ 補題 3.2 より、置換の積は(積をとる)順番によらないので、カッコを省略して $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ などと表すことが可能である。

▨ 逆置換

定義 (逆置換) $\sigma \in S_n$ に対し、$\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi = 1_\Omega$ をみたす置換 φ を σ の<u>逆置換</u>とよぶ。 ▨

命題 (逆置換の一意性) $\sigma \in S_n$ に対し、σ の逆置換はただ一つ存在する。(よって、σ の逆置換を σ^{-1} で表す。

Proof σ は Ω から Ω への全単射であるから、全単射の性質より、逆写像 σ^{-1} が一意的に存在する。
σ^{-1} もまた Ω から Ω への全単射であるので、σ^{-1} も置換である。 ▨

★ 逆置換の求め方：
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ に対し、} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$
とすればよい。
(σ^{-1} における $\sigma(1)\ \sigma(2) \cdots \sigma(n)$ の並びは、
$\sigma(i_1) = 1$ $\sigma(i_2) = 2$ $\cdots$ $\sigma(i_n) = n$ になるように適当に並びかえる。)

例題 2のノート p.89 の例題： $\sigma\circ\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{3}\,4 & 2 & 1 & 5 & \cancel{4}\,3 \end{pmatrix}$

の逆置換を求めよ。

$$(\sigma\circ\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cancel{3}\,4 & 2 & 1 & 5 & \cancel{4}\,3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & \cancel{1}\,5 & \cancel{5}\,1 & 4 \end{pmatrix}.$$

まず上下をひっくり返す　　　上の行を 1, 2, 3, 4, 5 の並びに並びかえる。

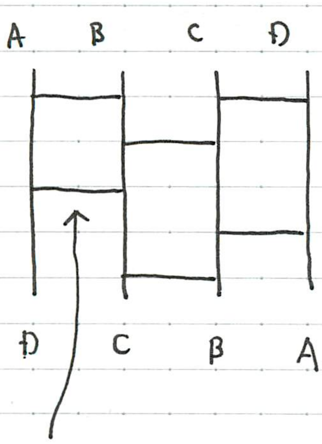
ついでに、この例題では $(\sigma\circ\varphi)^{-1} = \sigma\circ\varphi$.
(常にこれが成り立つとは限らない。) ▨

互換とあみだくじ

定義 長さ2の巡回置換（すなわち、S_n において (i, j) (ただし $1 \leq i < j \leq n$) の形の巡回置換）を **互換** という。▨

☆「あみだくじ」は置換を表す！

例題



上で左から i 番目の文字を
下で左から $\sigma(i)$ 番目に
移す。

$$\Longleftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4.$$

あみだくじの「橋」は、隣りあう2つの数字（文字）の互換を表す。

補題 S_n の任意の置換は巡回置換の積で表される。

Proof $^\forall \sigma \in S_n$ を巡回表示し、長さ1のサイクルも表示すると、巡回表示には1から n までのすべての数字が一度だけ現われる。

(なぜなら、σ は $\Omega \to \Omega$ の全単射であるので、$1, \dots, n$ のすべての数字が $1, \dots, n$ のすべての数字に1対1で対応づけられている。ゆえに、σ を巡回表示することにより、各数字から移される先をたどると、1度現われた数字は二度とは現われず(単射)、かつすべての数字が現われる(全射)。)

よって、σ の巡回表示に現われる各サイクルを巡回置換とすると、$\underbrace{\sigma}_{\text{(の巡回表示)}}$ はこれらの巡回置換の積と同一であることがわかる。 ∎

定理3.3 (置換は互換の積) 任意の置換 σ は2つの数字の互換の積で表される。

Proof $(i_1, \dots, i_n) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \cdots \circ (i_{n-1}, i_n)$. ∎

系 任意の2つの数字の互換 (i_1, i_2) は隣りあう2つの数字の互換の積で表される。

Proof (i_1, i_2) $(i_1 < i_2)$

$$= (i_1, i_1+1) \circ (i_1+1, i_1+2) \circ \cdots \circ (i_2-1, i_2) \circ (i_2-2, i_2-1) \circ \cdots \circ (i_1+1, i_1+2)(i_1, i_1+1).$$