補題 S_n の任意の置換は巡回置換の積で表される。

Proof $^\forall \sigma \in S_n$ を巡回表示し、長さ1のサイクルも表示すると、巡回表示には1からnまでのすべての数字が一度だけ現われる。
(なぜなら、σ は $\Omega \to \Omega$ の全単射であるので、$1, \dots, n$ のすべての数字が $1, \dots, n$ のすべての数字に1対1で対応づけられている。ゆえに、σ を巡回表示することにより、各数字から移される先をたどると、1度現われた数字は二度とは現われず（単射）、かつすべての数字が現われる（全射）。)
よって、σ の巡回表示に現われる各サイクルを巡回置換とすると、$\underbrace{\sigma}_{\text{(の巡回表示)}}$ はこれらの巡回置換の積と同一であることがわかる。 ∎

定理3.3 (置換は互換の積) 任意の置換 σ は2つの数字の互換の積で表される。

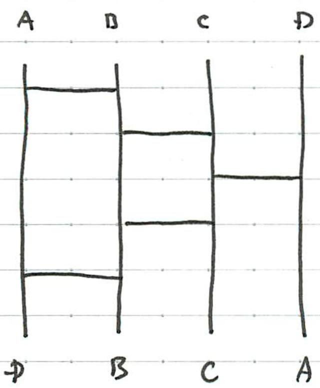
Proof $(i_1, \dots, i_n) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \cdots \circ (i_{n-1}, i_n)$. ∎

系 6/25 任意の2つの数字の互換 (i_1, i_2) は隣りあう2つの数字の互換の積で表される。

Proof (i_1, i_2) $(i_1 < i_2)$

$$= (i_1, i_1+1) \circ (i_1+1, i_1+2) \circ \cdots \circ (i_2-1, i_2) \circ (i_2-2, i_2-1) \circ \cdots \circ (i_1+1, i_1+2)(i_1, i_1+1).$$

例



$$(1,4) = (1,2)\circ(2,3)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(1,2).$$

■

定理2.3と上の例より、次の系が成り立つ。

系 任意の置換σは、隣りあう2つの数字の互換の積で表される。 ■

☆ゆえに、任意の置換σはあみだくじで表すことができる！

◎ 置換の「符号」と偶置換、奇置換

任意の置換を互換の積で表した際に、積の個数が偶数になるか、あるいは奇数になるかが、今後行列式を定義する上で重要になる。

そこで、以下では置換の「符号」を定義し、置換と互換の積で表した際、の性質について調べる。

定義（置換の符号）
$\sigma \in S_n$ に対し、次式で定義される $\varepsilon(\sigma)$ を置換の符号とよぶ。

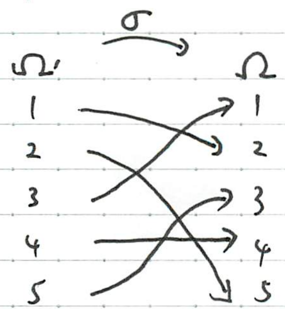
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right)$$
$$= \left(\frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\right)\left(\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\right)\left(\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\right)\cdots\left(\frac{\sigma(n)-\sigma(n-1)}{n-(n-1)}\right).$$

■

☆ $\varepsilon(\sigma)$ の意味を考えてみよう。

ここで、ノートp.85, 87で取り上げた置換 $\sigma \in S_5$,
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ を再び取り上げる。

ノート p.85 で描いた対応づけ



を σ の「グラフ」と呼ぶことにする。
$i \longrightarrow \sigma(i)$ の矢印を「辺」と呼ぶ。
$(i, \sigma(i))$ で表す。

さて、$\varepsilon(\sigma)$ に現われる因子は $\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ の形をしている。

① ここで、$j>i$ より、分母 $j-i$ は必ず正。

② 一方、分子 $\sigma(j)-\sigma(i)$ は、辺 $(i, \sigma(i))$ と辺 $(j, \sigma(j))$ が交差していなければ正、交差していると負。

また、σのグラフにおける辺の交差(交点)の個数は、一度σが決まれば変わらない。

③ よって、$\varepsilon(\sigma)$ の値の正負は、σのグラフの交点の個数が $\begin{cases} \text{偶数} \to \text{正} \\ \text{奇数} \to \text{負} \end{cases}$.

さらに
④ 上の例の場合は

$$\varepsilon(\sigma) = \left(\frac{\sigma(2)-\sigma(1)}{2-1}\right)\left(\frac{\sigma(3)-\sigma(1)}{3-1}\right)\left(\frac{\sigma(3)-\sigma(2)}{3-2}\right)\left(\frac{\sigma(4)-\sigma(1)}{4-1}\right)\left(\frac{\sigma(4)-\sigma(2)}{4-2}\right)\left(\frac{\sigma(4)-\sigma(3)}{4-3}\right)\left(\frac{\sigma(5)-\sigma(1)}{5-1}\right)\left(\frac{\sigma(5)-\sigma(2)}{5-2}\right)\left(\frac{\sigma(5)-\sigma(3)}{5-3}\right)\left(\frac{\sigma(5)-\sigma(4)}{5-4}\right)$$

となるが、σ は $\Omega \to \Omega$ の全単射なので、分子の任意の $\sigma(j)-\sigma(i)$、$i<j$ に対し、分母にも $\sigma(j)-\sigma(i)$ または $\sigma(i)-\sigma(j)$ となる因子がただ一つ存在する。よって、分子の $\sigma(j)-\sigma(i)$ の絶対値は、分母の因子の一つ(のみ)とキャンセルしあう。

ゆえに、$\boxed{\varepsilon(\sigma) \text{ の値の正負は、σのグラフの交点の個数が } \begin{cases} \text{偶数} \to 1 \\ \text{奇数} \to -1 \end{cases}}$.

以上より、次の補題が示される。

補題 1 $\forall \sigma \in S_n$ に対し. $\varepsilon(\sigma) = 1$ or -1. ■

補題 2 $\forall \sigma, \varphi \in S_n$ に対し. $\varepsilon(\sigma \circ \varphi) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\varphi)$.

Proof

$$\varepsilon(\sigma\circ\varphi) = \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i))}{j-i}\right)$$

$$= \prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i))}{\varphi(j)-\varphi(i)}\right)\prod_{i<j}\left(\frac{\varphi(j)-\varphi(i)}{j-i}\right) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\varphi).$$

■

補題 3 S_n の任意の互換 $f = (i, j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$ に対し. $\varepsilon(f) = -1$.

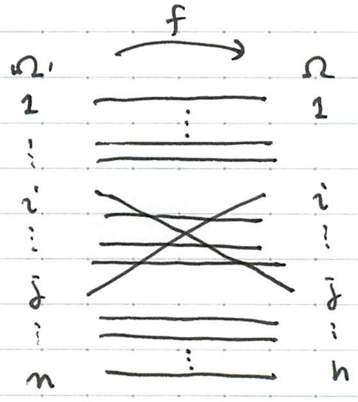
Proof

(1)

$$\varepsilon(f) = \left(\prod_{\substack{s<t \\ s,t\neq i,j}} \frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right)\left(\prod_{s\neq i,j}\frac{f(s)-f(j)}{s-j}\right) \times \left(\prod_{s\neq i,j}\frac{f(s)-f(i)}{s-i}\right)\left(\frac{f(i)-f(j)}{i-j}\right)$$

$$= \left(\prod_{\substack{s<t \\ s,t\neq i,j}} \frac{s-t}{s-t}\right)\left(\prod_{s\neq i,j}\frac{s-i}{s-j}\cdot\frac{s-j}{s-i}\right)\left(\frac{j-i}{i-j}\right) = -1.$$

(2) f のグラフを考える.



このとき, f のグラフの交点数を数えると.

① 辺 (i, j) と 辺 $(i+1, i+1), \ldots$, 辺 $(j-1, j-1)$ の交点数: $\underline{j-i-1}$

② 辺 (j, i) と 辺 $(i+1, i+1), \ldots$, 辺 $(j-1, j-1)$ の交点数: $\underline{j-i-1}$.

③ 辺 (i, j) と 辺 (j, i) の交点数: $\underline{1}$

以上より ①+②+③ $= 2(j-i-1)+1$ より f のグラフの交点数は奇数. よって $\sigma(f) = -1$.

■

定理 3.4 $\forall \sigma \in S_n$ を置換の積で表すとき、その個数の偶奇は表現のしかたに関係なく定まる。

(Proof) 補題1より $\varepsilon(\sigma) = 1$ or -1 として定まる。

一方、定理3.3より σ は互換の積として表されるので、ある互換 $f_1, \dots, f_m$ が存在して
$\sigma = f_1 \circ \cdots \circ f_m$ が成り立つ。このとき、補題2より $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(f_1 \circ \cdots \circ f_m) = \varepsilon(f_1) \cdots \varepsilon(f_m)$.
さらに補題3より $\varepsilon(f_j) = -1$ $\forall j = 1, \dots, m$. よって
$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(f_1) \cdots \varepsilon(f_m) = (-1) \cdots (-1) = (-1)^m$.
ゆえに、σ を互換の積で表したときに現われる互換の個数は

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \text{偶数個}. \\ -1 & \Rightarrow \text{奇数個}. \end{cases}$$ ■

定義(偶置換、奇置換)

$\sigma \in S_n$ が $\begin{cases} \text{偶数個の互換の積で表される} & (\varepsilon(\sigma)=1) \\ \text{奇数個} \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃 & (\varepsilon(\sigma)=-1) \end{cases} \Rightarrow \sigma$ を $\begin{cases} \text{偶置換} \\ \text{奇置換} \end{cases}$ という。■

◎置換行列

Skip

定義(置換行列). n項数ベクトル空間の標準基底(基本ベクトルから成る)

$$\Omega = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

に対し、置換 $\sigma \in S_n$ によって定まる対応づけ:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ e_i & \longmapsto & e_{\sigma(i)} \end{array}$$

を考える。このとき、$A e_i = e_{\sigma(i)}$ をみたす(n次正方)行列 A を置換 σ に対応する**置換行列**という。■

★ 置換行列は、各行、各列の中に1がただ1つあり、それ以外の成分は0。

§3.3 行列式の定義と展開

定義 3.3 (行列式)

$A=(a_{ij}) \in K^{n\times n}$ に対し、

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

を A の行列式 (determinant) とよび、$\det A$ または $|A|$ で表す。 □

☆ 行列式の定義において、$\sigma\in S_n$ は ${}^\forall\sigma\in S_n$ をすべて動く。

☆ $A\in K^{5\times 5}$ の場合。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

- 各行、各列から1コずつ成分をとってかける。
- 符号は下三角成分からとってきた成分の個数を m とするとき、$(-1)^m$.

定理 (サラスの公式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \overset{+}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} - \overset{-}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

□

☆ 4次以上の行列式にはサラスの公式は成りたたないので注意!