§3.3 行列式の定義と展開

定義3.3 (行列式)

$A=(a_{ij})\in K^{n\times n}$ に対し、

$$\sum_{\sigma\in S_n}{}' \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

を A の行列式 (determinant) とよび、$\det A$ または $|A|$ で表す。 ∎

☆ 行列式の定義において、$\sum'_{\sigma\in S_n}$ は $\forall\sigma\in S_n$ をすべて動く。

☆ $A\in K^{5\times 5}$ の場合。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

- 各行、各列から1コずつ成分をとってかける。
- 符号は下三角成分からとってきた成分の個数を m とするとき、$(-1)^m$.

7/2

定理 (サラスの公式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \overset{+}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} - \overset{-}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

∎

☆ 4次以上の行列式にはサラスの公式は成りたたないので注意!

◎ 置換行列 (p.96 の内容を再記)

<u>定義</u> (置換行列) n 項数ベクトル空間の基本ベクトルから成る標準基底

$$\Omega = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に対し、置換 $\sigma \in S_n$ によって定まる対応づけ:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \cup & & \cup \\ e_i & \longmapsto & e_{\sigma(i)} \end{array}$$

を考える。このとき、$i = 1, \dots, n$ に対し、$Ae_i = e_{\sigma(i)}$ をみたす n 次正方行列 A を置換 σ に対応する <u>置換行列</u> という。 ◪

◎ 置換行列のつくり方。

$\boxed{1}$ e_i を $e_{\sigma(i)}$ に移す行列 A を考える。

$$e_i = \begin{array}{c} \\ \\ i> \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{\sigma(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ <\sigma(i) \\ \\ \\ \end{array}$$

A を e_i の左側からかけるので

$$\sigma(i)> \overset{e_{\sigma(i)}}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \\ \boxed{\sigma(i)}> \\ \\ \end{array} \overset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ \boxed{0 \cdots 1 \cdots 0} \\ & \hat{i} & \end{bmatrix}} \overset{e_i}{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} <i \qquad (1)$$

① $e_{\sigma(i)}$ の第 $\sigma(i)$ 成分は A の第 $\sigma(i)$ 行によって決まる。
② A の第 $\sigma(i)$ 行と e_i の「内積」をとるので、A の $(\sigma(i), i)$ 成分を 1 とおけば、積の $\sigma(i)$ 成分が 1 に等しい。

以上より
$$a_{\sigma(i), j} = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases} = \delta_{ij}.$$

$\therefore$ A の $(\sigma(i), i)$ 成分を 1 にすればよい。

$\boxed{2}$ A の (i,j) 成分はどう表せばよいか?

A は e_i と $e_{\sigma(i)}$ に移す
$\Leftrightarrow$ $e_{\sigma^{-1}(i)}$ を e_i に移す.

↑

これを式(1)と同様に考えると.

$$\begin{array}{c} e_i \\ \| \end{array} \quad \begin{array}{c} A \\ \| \end{array} \quad \begin{array}{c} e_{\sigma^{-1}(i)} \\ \| \end{array}$$

$$i > \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = i > \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & \\ \boxed{0 \cdots 1 \cdots 0} \\ & & \end{bmatrix} \\ \sigma^{-1}\overset{\wedge}{(i)} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < \sigma^{-1}(i) \qquad (2)$$

① e_i の第 i 成分は A の第 i 行によって決まる.
② 式(1)と同様にして. A の第 $(i, \sigma^{-1}(i))$ 成分を 1 とおけばよい.

ゆえに
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = \sigma^{-1}(i)) \Leftrightarrow \sigma(j) = i \\ 0 & (j \neq \sigma^{-1}(i)) \Leftrightarrow \sigma(j) \neq i \end{cases}$$
$$= \delta_{\sigma^{-1}(i)\, j}$$
$$= \delta_{i\, \sigma(j)} .$$

(教科書. p.71の例を参照. ここでは $\sigma = (1, 2, 3)$.)

補題3.5 (1) A_σ : $\sigma \in S_n$ に対応する置換行列のとき. $|A_\sigma| = \varepsilon(\sigma)$.
(2) $|E_\sigma| = 1$.

Proof (1) 置換行列の作り方より, A_σ の第 i 行の成分は. $\sigma^{-1}(i)$ 列のみ 1, その他は 0 .
よって行列式の定義より

$$|A_\sigma| = \varepsilon(\sigma^{-1}) \underbrace{a_{1\sigma^{-1}(1)}}_{=1} \underbrace{a_{2\sigma^{-1}(2)}}_{=1} \cdots \underbrace{a_{n\sigma^{-1}(n)}}_{=1}$$

$$= \varepsilon(\sigma^{-1}) \underset{\uparrow}{=} \varepsilon(\sigma).$$

演習問題 （ヒント：任意のσは互換の積で表されるから…）.

(2) 行列式の定義より

$$|E_n| = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\substack{\parallel \\ \varepsilon(1_n) \\ \parallel \\ 1}} \underbrace{a_{11}}_{\substack{\parallel \\ 1}} \underbrace{a_{22}}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdots \underbrace{a_{nn}}_{\substack{\parallel \\ 1}}$$

$$= 1.$$

∎

命題 1

$$|A| = \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proof 行列式の定義より

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ところが、$a_{21}, \ldots, a_{n1} = 0$ より、上の項の中で非零の項は、$\sigma(1) = 1$ をみたす置換 σ に対応する項のみである。よって

$$|A| = \sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\, a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

このとき、σ は数字 $2, \ldots, n$ の間の置換である。

$$= a_{11} \sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

よって、数字 $2, \ldots, n$ をそれぞれ数字 $1, \ldots, n-1$ に置き直すと、σ は数字 $1, \ldots, n-1$ の任意の置換とみなすことができる。ゆえに $\sigma \in S_{n-1}$ とおくことができる。
また、この数字の置き換えは

$$\begin{matrix} 2 & \cdots & n \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \cdots & n-1 \end{matrix}$$

の1対1対応であるので、

σを互換の積で表した際の互換の積の個数は影響を与えない。ゆえに $\varepsilon(\sigma)$ の値は変化しない。

よって
$$|A| = a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} a_{2,\sigma(1)+1} \cdots a_{n,\sigma(n-1)+1}$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$
∎

補題 3.6

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$

Proof. 命題1を $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, …, $\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

に繰り返し適用することにより、主張を得る。∎

補題 3.7 $A \in K^{m \times m}$, $B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times n}$,

$D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ のとき、$|D| = |A||C|$.

Proof. $D = (d_{ij})$ とおくと、行列式の定義より

$$|D| = \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \varepsilon(\sigma)\, d_{1\sigma(1)} d_{2\sigma(2)} \cdots d_{m\sigma(m)} \times d_{m+1,\sigma(m+1)} \cdots d_{m+n,\sigma(m+n)} .$$

$|D|$ の各項のうち非零の項は、
$$\sigma(m+1) > m, \ \cdots, \ \sigma(m+n) > m \quad (1)$$
をみたす項のみである。そして (1) が成り立つならば
$$\sigma(1) \leq m, \ \cdots, \ \sigma(m) \leq m \quad (2)$$
も成り立たなければならない (さもなくば、
$1 \leq {}^{\exists}i \leq m$ s.t. $\sigma(i) > m$ とすると、
$m+1 \leq {}^{\exists}j \leq m+n$ s.t. $\sigma(j) \leq m$ となり、$d_{j\sigma(j)} = 0$ を含んでしまう。)

ここで、(1), (2) をみたす σ は、$\{1, \ldots, m\}$ については S_m の置換 σ'、$\{m+1, \ldots, m+n\}$ については S_n の置換 σ'' とみなすことができる。

そこで、$\sigma' \in S_m$ を一つ固定し、σ'' $(\in S_n)$ を変えてみると、$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma') \cdot \varepsilon(\sigma'')$ より

$$\left(\varepsilon(\sigma')\, d_{1\sigma'(1)}\, d_{2\sigma'(2)} \cdots d_{m\sigma'(m)}\right)$$

$$\times \left(\sum_{\sigma'' \in S_n}{}' \varepsilon(\sigma'')\, d_{1+m,\, \sigma''(1)+m}\, d_{2+m,\, \sigma''(2)+m} \cdots d_{n+m,\, \sigma''(n)+m}\right) \tag{3}$$

ここで $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ とおくと、

$$a_{ij} = d_{ij} \quad (1 \le i, j \le m), \qquad c_{ij} = d_{m+i,\, m+j} \quad (1 \le i, j \le n)$$ より、

式(3) は

$$\left(\varepsilon(\sigma')\, a_{1\sigma'(1)}\, a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{m\sigma'(m)}\right)$$

$$\times \left(\sum_{\sigma'' \in S_n}{}' \varepsilon(\sigma'')\, c_{1\sigma''(1)}\, c_{2\sigma''(2)} \cdots c_{n\sigma''(n)}\right).$$

となる。よって、$\sigma' \in S_n$ も変えて和をとると、

$$|D| = \left(\sum_{\sigma' \in S_m}{}' \varepsilon(\sigma')\, a_{1\sigma'(1)}\, a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{m\sigma'(m)}\right)$$

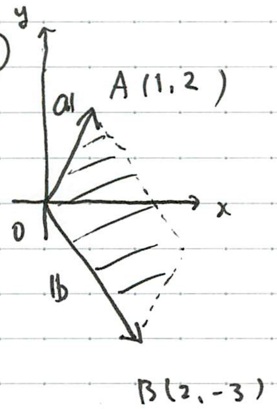
$$\times \left(\sum_{\sigma'' \in S_n}{}' \varepsilon(\sigma'')\, c_{1\sigma''(1)}\, c_{2\sigma''(2)} \cdots c_{n\sigma''(n)}\right) \tag{4}$$

$$= |A|\,|C|$$

が成り立つ。 ∎

例題3.7 のより易しい例. ── 2次元で考える.

⓪



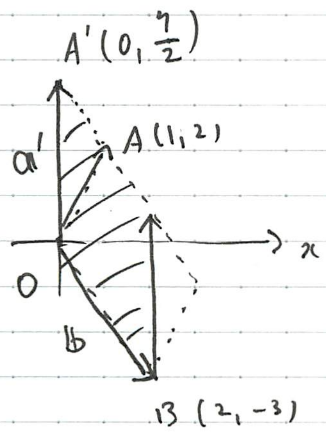
$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ で張られる平行四辺形を考える. この平行四辺形の面積を求める.

それぞれの辺が座標軸に重なるような平行移動を行う

↓

面積(体積)は変わらない.

①

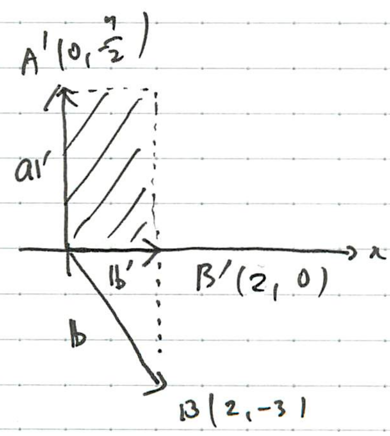


$\mathbb{a}$ を $\mathbb{b}$ に沿って平行移動し, y軸に重ねると

$$\mathbb{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

を得る.

②



$\mathbb{b}$ を $\mathbb{a}'$ に沿って平行移動し, x軸に重ねると

$$\mathbb{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る.

平行四辺形の辺の平行移動は高さを変えず, 面積も変えないので, 与えられた平行四辺形⓪の面積は平行四辺形③の面積に等しい. よって

$$2 \times \frac{7}{2} = 7.$$

一方、与えられた平行四辺形 ① の辺となる平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を列として並べた行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-4 = -7.$$

よって大きさが一致することがわかる。 ■

§3.4 行列式の性質

定理3.8 (1) 異なる2つの行を交換すると行列式は-1倍となる。

(2) 異なる2列を交換すると行列式は-1倍となる。

Proof (1) $A=(a_{ij}) \in K^{n\times n}$, $B=(b_{ij})$ を A の第s行と第t行を交換したものとする。 $(s<t)$

行列式の定義より

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{s\sigma(s)} \cdots a_{t\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

一方,

$$|B| = \sum_{\alpha\in S_n} \varepsilon(\alpha)\, b_{1\alpha(1)} \cdots b_{t\alpha(s)} \cdots b_{s\alpha(t)} \cdots b_{n\alpha(n)}.$$

ここで、置換 α は、s を $\sigma(t)$ に、t を $\sigma(s)$ に移す以外は σ と同じ挙動をする。

よって、$\underline{\alpha = \sigma\circ(s,t)}$.

$$\therefore\ |B| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\alpha)\, a_{1\alpha(1)} \cdots a_{t\alpha(t)} \cdots a_{s\alpha(s)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ(s,t))\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{t,\sigma(s)} \cdots a_{s,\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= (\varepsilon(s,t)) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{t\sigma(s)} \cdots a_{s\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= -|A|.$$