一方、与えられた平行四辺形①の辺となる平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を列として並べた行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-4 = -7.$$

よって大きさが一致することがわかる。 ▨

7/5

§3.4 行列式の性質

定理 3.8 (1) 異なる2つの行を交換すると行列式は -1 倍となる。
(2) 異なる2列を交換すると行列式は -1 倍となる。

Proof (1) $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$, $B = (b_{ij})$ を A の第 s 行と第 t 行を交換したものとする。 $(s<t)$

行列式の定義より

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{s\sigma(s)} \cdots a_{t\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

一方、

$$|B| = \sum_{\alpha\in S_n} \varepsilon(\alpha)\, b_{1\alpha(1)} \cdots b_{t\alpha(s)} \cdots b_{s\alpha(t)} \cdots b_{n\alpha(n)}.$$

ここで、置換 α は、s を $\sigma(t)$ に、t を $\sigma(s)$ に移す以外は σ と同じ挙動をする。

よって、$\underline{\alpha = \sigma\circ(s,t)}$.

$$\therefore\ |B| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\alpha)\, a_{1\alpha(1)} \cdots a_{t\alpha(t)} \cdots a_{s\alpha(s)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\circ(s,t))\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{t,\sigma(s)} \cdots a_{s,\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= (\varepsilon(s,t)) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{t\sigma(s)} \cdots a_{s\sigma(t)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= -|A|.$$

(2) $A=(a_{ij}) \in K^{n\times n}$, $B=(b_{ij})$ を A の第 s 列と第 t 列 $(1 \leq s < t \leq n)$ を交換したものとする。

行列式の定義より $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

一方. $|B| = \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\alpha)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\alpha(p)} \cdots a_{q\alpha(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

ここで.
$$\begin{cases} \alpha(p) = (s,t)\circ \underset{\underset{s}{\shortparallel}}{\sigma(p)} = t. \\ \alpha(q) = (s,t)\circ \underset{\underset{t}{\shortparallel}}{\sigma(q)} = s \end{cases}$$

以外は $\alpha(j) = \sigma(j)$.

よって. $|B| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon((s,t)\circ\sigma)$

$\times\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\,(s,t)\circ\sigma(p)} \cdots a_{q\,(s,t)\circ\sigma(q)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= (\varepsilon(s,t)) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\,t} \cdots a_{q\,s} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= -|A|$. ▨

定理 3.9 $A \in K^{n\times n}$ のとき, $|{}^tA| = |A|$.

Proof) $A=(a_{ij})$, ${}^tA = (b_{ij}) = (a_{ji})$ とおく. このとき

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{s\sigma(s)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(s)s} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})}_{\shortparallel\ \varepsilon(\sigma)}\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{s\sigma^{-1}(s)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = |A|.$$

定理 （行列式の多重線形性）

(1)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{= |A_2|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{= |A_3|}.$$

(2) $r \in K$ に対し．

$$|B_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r a_{k1} & r a_{k2} & \cdots & r a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{= |B_2|}.$$

Proof,

(1) $|A_1| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \times (a_{k\sigma(k)} + b_{k\sigma(k)}) \times \cdots a_{n\sigma(n)}.$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= |A_2| + |A_3|.$$

(2) $|B_1| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots r\, a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$$= r \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= r\, |B_2|.$$

$\boxtimes$

系 (定理 3.10)

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) $r \in K$ に対し

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & r\,a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & r\,a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proof (1), (2) とも、転置行列をとって上の定理を適用すればよい。(定理 3.9 より $|{}^tA| = |A|$.)

■

定理 3.11 $A \in K^{n\times n}$.

(1) A の 2つの行が等しければ $|A| = 0$. $(n \geq 2)$.
(2) A のある行の成分がすべて 0 ならば $|A| = 0$.

Proof (1) A の第 j 行と第 k 行が等しいとする $(1 \leq j < k \leq n)$.
行列式の定義より

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

であるが、$\sigma', \sigma'' \in S_n$ s.t.

$$\begin{array}{ccc} \sigma'(j) & < & \sigma''(j) \\ \| & & \| \\ \sigma''(k) & < & \sigma'(k) \end{array}, \quad \sigma'(i) = \sigma''(i) \ \text{for}\ i \neq j, k$$

をみたす σ', σ'' が存在する。
このとき $\sigma'' = \sigma'(j, k)$ より $\varepsilon(\sigma'') = -\varepsilon(\sigma')$.

よって $\varepsilon(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{k\sigma'(k)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$
$+ \varepsilon(\sigma'') a_{1\sigma''(1)} \cdots a_{k\sigma''(k)} \cdots a_{j\sigma''(j)} \cdots a_{n\sigma''(n)}$

$= \varepsilon(\sigma') \{ a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{k\sigma'(k)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$
$- a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{k\sigma'(k)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \}$
$= 0.$

$|A|$ を構成する各項はすべて上のようなキャンセルする項の組に分かれるので. $|A| = 0$.

(2) 定理より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

☒

系 $A \in K^{n\times n}$
(1) A の2つの列が等しければ $|A| = 0$. $(n \geq 2)$
(2) A のある列の成分がすべて0ならば $|A| = 0$.

Proof (1), (2) とも, 転置行列をとって上の定理を適用すればよい. ☒

定理 3.12 $A, B \in K^{n\times n}$ のとき. $|AB| = |A||B|$.

Proof. $A = (\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \cdots\ \mathfrak{a}_n)$, $B = (b_{ij})$ とおくと

$$AB = \left(\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1,1} \mathfrak{a}_{k_1} \quad \sum_{k_2=1}^{n} b_{k_2,2} \mathfrak{a}_{k_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n,n} \mathfrak{a}_{k_n} \right)$$

より.

$$|AB| = \left| \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1,1} \mathfrak{a}_{k_1} \quad \sum_{k_2=1}^{n} b_{k_2,2} \mathfrak{a}_{k_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n,n} \mathfrak{a}_{k_n} \right|$$
$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_1,1} b_{k_2,2} \cdots b_{k_n,n} |\mathfrak{a}_{k_1}\ \mathfrak{a}_{k_2} \cdots \mathfrak{a}_{k_n}|.$$

ところが，$|a_{k_1}\ a_{k_2}\ \cdots\ a_{k_n}|$ に等しい列がある．すなわち

$k_1,\dots,k_n$ の中に等しいものがあれば $|a_{k_1}\ a_{k_2}\cdots a_{k_n}|=0$ となるので，上の和は，$k_1,\dots,k_n$ が相異なる組，すなわち $\sigma\in S_n$ に対して $k_{\sigma(1)}\, k_{\sigma(2)}\cdots k_{\sigma(n)}$ として とることのできる数の組であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sum_{\sigma\in S_n} b_{k_{\sigma(1)}1}\cdots b_{k_{\sigma(n)}n}\,|a_{k_{\sigma(1)}}\ a_{k_{\sigma(2)}}\cdots a_{k_{\sigma(n)}}| \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}{}' \, b_{k_{\sigma(1)}1}\cdots b_{k_{\sigma(n)}n}\,\varepsilon(\sigma)\,|a_{k_1}\ a_{k_2}\cdots a_{k_n}| \\
&= \Big(\sum_{\sigma\in S_n}{}' \,\varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}\Big)|A| \\
&= |B|\,|A|.
\end{aligned}
$$

∎

（上の証明は 佐藤篤氏「線型代数学入門」を参考にしました． http://www.math.tohoku.ac.jp/~atsushi/ ）

補題 3.14 （基本行列の行列式） (p.34〜35)

(1) $|P_{st}|=-1$, (2) $|E_{st}(r)|=1$, (3) $|E_s(r)|=r$.

Proof (1)
$$
P_{st}=\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}\\
\qquad\qquad\ \ \hat{s}\qquad\ \ \hat{t}
\end{array}
$$

よって行列式の定義より

$$|P_{st}| = a_{11}\cdots a_{st}\cdots a_{ts}\cdots a_{nn}$$

$\sigma=(s,t)$ とおくと

$$|P_{st}| = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=-1}\ \underbrace{a_{11}}_{=1}\cdots \underbrace{a_{s\sigma(s)}}_{=1}\cdots \underbrace{a_{t\sigma(t)}}_{=1}\cdots \underbrace{a_{nn}}_{=1}$$

$= -1.$

(2) $E_{st}(r) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & r & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$.

$E_{st}(r)$ は上三角行列であるので、補題3.6より $|E_{st}(r)|=1$.

(3) $|E_s(r)| = \begin{array}{c} s \\ \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \end{array} = r \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = r|E_n| = r$.

∎

系 3.15 $A \in K^{n\times n}$. P_{st}, $E_{st}(r)$, $E_s(r)$ に対し

(1) $|P_{st}A| = -|A|$. (2つの行を交換すると行列式は-1倍)
(2) $|E_{st}(r)A| = |A|$. (ある行をr倍して他の行に加えても行列式は変わらない)
(3) $|E_s(r)A| = r|A|$. (ある行をr倍すると行列式はr倍).

Proof 定理3.12と補題3.14よりOK. ∎

定理 3.16 Aが正則 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Proof 定理2.3より、Aが正則 $\Longleftrightarrow$ Aは有限個の基本行列の積で表せる $\Longleftrightarrow$ $|A|$は有限個の基本行列の行列式の積に等しい $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$ (∵基本行列の行列式 $\neq 0$ ← 補題3.14). ∎

定理 3.17 $A \in K^{n\times n}$.
$|A| = 0 \Longrightarrow {}^{\exists} v = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$, $\neq 0$
s.t. $vA = 0$.

$|A|=0$ ならば、Aは正則でないので、Aを簡約階段行列に変形しても単位行列E_nに等しくならない。すなわち、ある基本行列の積Qが存在して $QA = \begin{pmatrix} * \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ が成りたつ。Qの第n行を $v = (b_1, \dots, b_n)$ とおくと $vA = 0$.
また $|Q| \neq 0$ より $v \neq 0$. ∎