NO. 120
DATE 7 8 2013

9/12

第4章 行列式の発展

§4.1 多項式

定義（多項式）

$a_0, \dots, a_n \in K$. $0 \le n < +\infty$ なる n.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

の形の式を（変数）x の1変数多項式とよぶ。　degree

n を $f(x)$ の次数とよび、$\deg(f)$ で表す。
a_n を $f(x)$ の主係数とよび、$lc(f)$ で表す。

the leading coefficient

（多項式の和，差，積，スカラー倍については省略．）□

注意 (1) 単項式は多項式．

(2)「方程式」は，2つの式を等号で結んだ関係を表す．
1つの「多項式」と「方程式」は異なる．

多項式 $f(x)$ の零点 $\Longleftrightarrow$ 代数方程式 $f(x)=0$ の根（解）□

$f(x)=0$ になる x の値（点）

方程式をみたす x の値．

§4.2 固有多項式

- 多項式も行列の成分になり得る．
- 行列を係数にもつ多項式を考えることができる．
- 多項式の変数に行列を代入できる．

定義（多項式の変数に行列を代入）

$A \in K^{n \times n}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ のとき

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

□

§4.2.1 ハミルトン・ケーリーの定理

定義 4.1 (固有多項式、固有方程式)

$A \in K^{n \times n}$ のとき、

ファイ(大文字)

$$\Phi_A(x) = |xE_n - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

を A の固有多項式(特性多項式)とよび。

方程式 $\Phi_A(x)=0$ を A の固有方程式(特性方程式)とよぶ。 ☐

定義 (トレース)

$A \in K^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$ の対角成分の和

$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ を A のトレースとよび、$\mathrm{Tr}\,A$ で表す。 ☐

事実(命題) 4.2 $A \in K^{n \times n}$ のとき、

(1) $\Phi_A(x)$ は n 次の多項式。
(2) $\Phi_A(x)$ の主係数 (x^n の係数) $=1$.
(3) x^{n-1} の係数は $-\mathrm{Tr}\,A$.
(4) 定数項は $(-1)^n|A|$.

Proof (1) 行列式の定義と $\Phi_A(x)$ の定義より、$\Phi_A(x)$ において x の次数が最も大きくなるような成分の選び方は 対角成分を選んで積を作った時になる。このときの対角成分の積は

$$(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn}) \quad \cdots ①$$

これを展開すると $\Phi_A(x)$ の次数は高々 n.

(2) ①の展開より、x^n の係数、すなわち $\Phi_A(x)$ の主係数は 1.

(3) $\Phi_A(x)$ の x^{n-1} の項をもつような $\Phi_A(x)$ の成分の積は、対角成分の $x-a_{ii}$ を $n-1$ コの積を

(つづく)

とる必要がある。ところが、行列式の定義より、対角成分のうち $n-1$ コの積をとると、残りの1コの因子も対角成分の残った成分をとらなければならない。よって、$\Phi_A(x)$ の $n-1$ 次の項は、上の①の $n-1$ 次の項に等しい。
上の①を展開して $n-1$ 次の係数を求めると

$$-a_{11}-a_{22}\cdots-a_{nn} = -\mathrm{Tr}\,A$$

が得られる。

(4) $\Phi_A(x)$ の定数項は $\Phi_A(0)$ に等しい。ところが $\Phi_A(x)$ の定義より、$\Phi_A(0)=|-A|=(-1)^n|A|$. ▨

定理4.1 (ハミルトン・ケーリーの定理)

$A\in K^{n\times n}$, $\Phi_A(x)=|xE_n-A|$ のとき、$\Phi_A(A)=O$.

Proof xE_n-A の余因子行列を $B(x)$ とおくと、定理3.20 (ノート p.116) より

$$B(x)\,(xE_n-A) = |xE_n-A|\,E_n = \Phi_A(x)\,E_n.$$

が成り立つ。行列 xE_n-A の (i,j) 余因子は $n-1$ 次以下の多項式なので、$B(x)$ の各成分は $n-1$ 次以下の多項式。よって

$$B(x)=\sum_{i=0}^{n-1}B_i x^i \qquad (B_i\in K^{n\times n})$$

と表すことができる。一方、$\Phi_A(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ $(a_n=1)$ とおくと、

$$\begin{aligned}B(x)\,(xE_n-A) &= \sum_{i=0}^{n-1}B_i x^i\,(xE_n-A)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}B_i x^{i+1}-\sum_{i=0}^{n-1}B_i A x^i \quad \cdots ②\\ &= \Phi_A(x)\,E_n\\ &= \sum_{i=0}^{n}a_i E_n x^i \quad \cdots ③\end{aligned}$$

②と③の x^i の係数を比較すると

$$a_0 E_n = -B_0 A, \qquad a_n E_n = E_n = B_{n-1},$$

$$a_i E_n = B_{i-1} - B_i A \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

がわかる。ゆえに

$$\Phi_A(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i E_n A^i$$

$$= B_{n-1} A^n + (B_{n-2} - B_{n-1} A) A^{n-1} + \cdots + (B_0 - B_1 A) A - B_0 A$$

（矢印で結んだ項どうしがキャンセルしあう）

$$= O$$

が成り立つ。 □

◎ 固有値，固有ベクトル．

定義 4.2 （固有値）． $A \in K^{n \times n}$．

Aの（固有方程式 $\Phi_A(x) = 0$ の根 / 固有多項式 $\Phi_A(x)$ の零点）を A の固有値とよぶ． □

☆ $A \in K^{n \times n}$ は何個の固有値をもつか？

$\Longleftrightarrow$ n次代数方程式は何個の根をもつか？

定理 4.2 （代数学の基本定理）

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

このとき，方程式 $f(x) = 0$ は少なくとも1つの複素数の根をもつ． □

系 上の方程式 $f(x) = 0$ は重複も込めて n個の複素数の根をもつ． □

注意 「重複も込めて」の意味（例）：

方程式 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ は 解 $x=\underbrace{1,1}_{\text{2つと数える}}$ をもつ。 □

★ さて、α を $A\in K^{n\times n}$ の固有値とすると

$$\Phi_A(\alpha)=|\alpha E_n - A| = 0$$

$\iff |A-\alpha E_n|=0$

定理3.16（教科書 p.83, ノート p.110）

$\iff$ 行列 $A-\alpha E_n$ は正則でない

定理3.17（教科書 p.83, ノート p.110）

$\iff \mathrm{rank}(A-\alpha E_n)<n$

系2.12（教科書 p.52, ノート p.76）

$\iff (A-\alpha E_n)v=0$ （斉次連立1次方程式）が非自明解 $v\neq 0$ をもつ。

定理2.17（教科書 p.53, ノート p.80）

$\iff Av=\alpha E_n v=\alpha v.$

ベクトルに行列をかけたものがベクトルの定数倍に等しい → v は固有値 α に付随する「特別な」ベクトル。

定義 4.3 （固有ベクトル） $A\in K^{n\times n}$, α : Aの固有値.

$$(A-\alpha E_n)v=0 \iff Av=\alpha v, \quad v\neq 0$$

をみたすベクトル v を 固有値 α に属するAの固有ベクトル と呼ぶ。 □