7/19

§5.1 線形写像と行列.

定義 5.1 K^n, K^m : 数ベクトル空間.

$f: K^n \to K^m$ が 線形写像 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, \forall y \in K^n$, $\lambda \in K$ に対して

(LM1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$. } 重ね合わせの原理.
(LM2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

が成り立つ.

$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \overset{\text{def}}{\iff}$ K^n から K^m への線形写像全体の集合.
↑ homomorphism (準同形)

$\mathrm{End}(K^n) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$ ($\iff$ K^n から K^n への線形写像全体の集合.)
↑ endmorphism (自己準同形)

□

命題 $\forall f: K^n \to K^m$ に対して. $f(0) = 0$.

Proof $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ より.

最左辺と最右辺から $f(0)$ を消去すると $f(0) = 0$ を得る. □

(例) 線形写像の例.

$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ に対して, 写像 $L_A: K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ と定めると. L_A は線形写像.

Proof $\forall x, y \in K^n$, $\lambda \in K$ に対し

$$L_A(x+y) \overset{①}{=} A(x+y) = Ax + Ay = L_A(x) + L_A(y).$$
$$L_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda L_A(x).$$

① 行列の(積の)分配法則 (定理1.3) (教科書 p.22, ノート p.37) □

以上の例より、行列は（数ベクトル空間の）線形写像を与えることがわかったが、では一般の線形写像は行列で表されるか？

$$\text{行列} \longrightarrow \text{線形写像}$$

？

実は、任意の線形写像は行列で表すことができる！

…という事実を §5.1 で学びます。
(22)

（一般の）線形写像の与え方

$$f : K^n \to K^m \quad : \text{線形写像}.$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ x_1 & \longmapsto & x_1' \\ x_2 & \longmapsto & x_2' \\ x_3 & \longmapsto & x_3' \\ & \vdots & \end{array}$$

と書いていっても、K^n のベクトルが無限個存在するとfの定義を全部書ききれない。どうすればよいか？

そこで、K^n の任意のベクトル x を

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$$

e_j：（n項）基本ベクトル $(j = 1, \dots, n)$
$c_j \in K$ $(j = 1, \dots, n)$

と表し、fで K^m へ移してみる。

$$f(x) = f(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n)$$
$$= c_1 f(e_1) + c_2 f(e_2) + \cdots + c_n f(e_n)$$

$e_1, \dots, e_n$ の行先さえ決めれば、$\forall x \in K^n$ の行先が決まる！

$\boxed{\text{線形写像を1つ与える(定める)}} \iff \boxed{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \text{ の行先を定める}}$

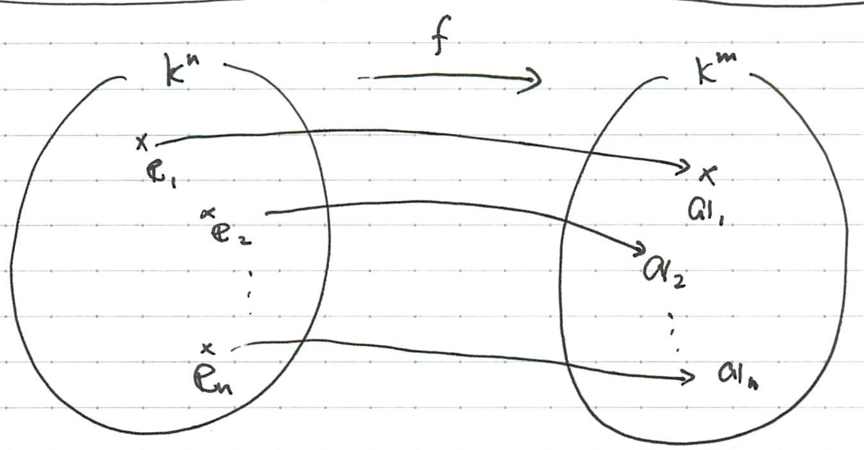

図: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ の行先を定めれば(それぞれ $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ で表した), 線形写像が定まる.

◎ 線形写像の表し方.

$$
\begin{array}{ccccc}
f: & K^n & \longrightarrow & K^m & : \text{線形写像}. \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
 & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{a}_1 & \\
 & \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{a}_2 & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \mathbf{e}_n & \mapsto & \mathbf{a}_n &
\end{array}
$$

で表すことができるが、より明快な表し方はないの?

そこで, $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ を以下のように表す:

$$
f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}
$$

そして, 列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を並べて行列を作る:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}.
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n
\end{array}
$$

すると

$$f(e_1) = a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A e_1,$$

$$f(e_2) = A e_2, \ldots, \quad f(e_n) = A e_n.$$

ゆえに、$\forall x = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n \in K^n$ に対し、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n) \\ &= c_1 f(e_1) + \cdots + c_n f(e_n) \\ &= c_1 A e_1 + \cdots + c_n A e_n \\ &= A(c_1 e_1) + \cdots + A(c_n e_n) \\ &= A(c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n) \\ &= A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Ax. \quad (\text{すなわち、} f = L_A). \end{aligned}$$

任意の線形写像は(ある)行列で表される!

次に、f の行列での表し方が一意的であることを示す。

$B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$ とすると、

$$f(e_1) = A e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = B e_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$f(e_n) = A e_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = B e_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix}$$ より $A = B$.

以上より、次の定理が成り立つ。

<u>定理 5.1</u> (線形写像の行列表示)

線形写像 $f: K^n \to K^m$ は適当な行列 $A \in K^{m \times n}$ により、$f = L_A$ と一意的に表される。 ☑