7/23

例題 5.1 $f: K^2 \longrightarrow K^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

(1) fは線形写像であることを示す.

・fの行列表示を求める.

$$f(\mathbf{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと $f = L_A$.
定理5.1より

$\therefore$ $\forall x \in K^2$ に対し $f(x) = Ax$.
ゆえに fは線形写像.
(教科書 p.125, ノート p.128 の例を参照.)

(2) fの合成 $f^2 = f \circ f : K^2 \to K^2$ を求め, それが線形写像であることを示す.

$x \in K^2$ に対し $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(Ax)$
$= A(Ax) = A^2 x$.

$f^2 = L_{A^2}$ より f^2 は線形写像.

また $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ より, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2$ に対し.

$$f^2(x) = A^2 x = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 8x_1 + 11x_2 \end{pmatrix}.$$

□

§5.2. 線形写像の像と核.

以下.
$f : K^n \longrightarrow K^m$ を線形写像とする.

定義 (fの像)

$\{ f(x) \mid x \in K^n \}$ $\subset K^m$ をfの像とよび. (image) $\mathrm{Im}\, f$で表す. ☒

集合　$f(x)$: その　$x \in K^n$: 条件

$y \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow {}^{\exists} x \in K^n$ s.t. $y = f(x)$.

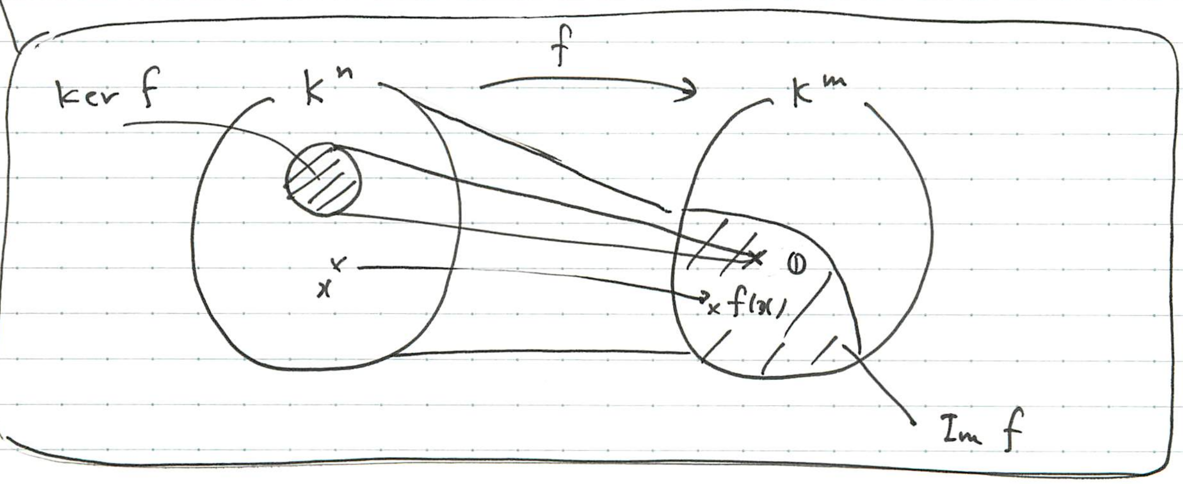
定義 (fの核)

集合 $\{ x \in K^n \mid f(x) = 0 \}$ $\subset K^n$ をfの核とよび. (kernel) $\mathrm{Ker}\, f$で表す. ☒

$x \in K^n$: その　$f(x)=0$: 条件.

定理 5.2

(1) $\mathrm{Im}\, f$ は K^m の部分空間.
(2) $\mathrm{Ker}\, f$ は K^n の部分空間.
(3) f が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.



Proof　(1), (2) は, それぞれの集合が部分空間の定義の (SS 1), (SS 2), をみたすことを示す.

(SS 0) 空でないこと.

NO. 134

DATE 9 · 18 · 2013

$\mathbb{0} \in \mathrm{Im} f$

$\mathrm{Im} f \neq \phi$,

このとき，$x+y \in \mathrm{Im} f$，$\lambda x \in \mathrm{Im} f$ $(\lambda \in K)$ を示す．

(1) $x, y \in \mathrm{Im} f$ とする．

$\exists x', \exists y' \in K^n$ s.t. $x = f(x')$，$y = f(y')$．

f は線形写像であるので

$$x + y = f(x') + f(y') = f(x' + y').$$

$\therefore x + y \in \mathrm{Im} f$.

また，$\lambda \in K$ に対し，$\lambda x = \lambda f(x') = f(\lambda x')$

$\therefore \lambda x \in \mathrm{Im} f$.

$\mathbb{0} = f(\mathbb{0})$ より $\mathbb{0} \in \mathrm{Im} f$．よって $\mathrm{Im} f \neq \phi$.

以上より $\mathrm{Im} f$ は K^m の部分空間．

(2) $x, y \in \mathrm{Ker} f$ とする．このとき，$x+y \in \mathrm{Ker} f$，$\lambda x \in \mathrm{Ker} f$，$\mathbb{0} \in \mathrm{Ker} f \neq \phi$ を示す．

仮定より $f(x) = f(y) = \mathbb{0}$．このとき，

$f(x+y) = f(x) + f(y) = \mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0}$，$\therefore x+y \in \mathrm{Ker} f$

$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$．$\therefore \lambda x \in \mathrm{Ker} f$

$f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ より $\mathbb{0} \in \mathrm{Ker} f$．$\mathrm{Ker} f \neq \phi$.

以上より $\mathrm{Ker} f$ は K^n の部分空間．

(3) $(\Rightarrow)$ f は単射より，$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

$\therefore$ $\underset{\underset{f(x-y)}{\parallel}}{f(x) - f(y)} = \mathbb{0} \Rightarrow x - y = \mathbb{0}$.

$f(x-y)$ とおくことができる．

$a = x - y$ とおくと．$f(a) = \mathbb{0} \Rightarrow a = \mathbb{0}$.

すなわち，f で移して $\mathbb{0}$ に移るベクトル $\in K^n$ は $\mathbb{0}$ しかない．ゆえに $\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{0}\}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{0}\}$ より，$x, y \in K^n$ に対し，

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = \mathbb{0} \Rightarrow$

$f(x-y) = \mathbb{0} \underset{\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{0}\}}{\Rightarrow} x - y = \mathbb{0} \Rightarrow x = y$.

ゆえに f は単射．

例題 5.2

$$f : K^2 \longrightarrow K^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ を求める.

(1) $$\mathrm{Im}\, f = \left\{ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \right\}.$$

$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと.

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = 2x_1 + 2x_2 \end{cases},$$

この連立1次方程式から 変数 x_1, x_2 を消去すると x と y の関係式が現われる.

$$\begin{array}{rrcl} & 2x & = & 2x_1 + 2x_2 \\ +) & -y & = & -2x_1 - 2x_2 \\ \hline & 2x - y & = & 0. \end{array}$$

$\therefore\ y = 2x.$

ゆえに $\mathrm{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \middle| x \in K. \right\}.$

(2) $$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \middle| \underline{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}. \right\}$$

をみたす $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の集まりを求める.

$\Updownarrow$

斉次連立1次方程式 $Ax = 0$ を解く.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

自明な解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は常に存在.

(自明な解しか存在しなければ $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.)

非自明な解が存在すればそれを求める.

今回は

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in K. \right\}.$$

KOKUYO