3/26

§5.3 線形結合と部分空間

$x_1, \dots, x_r \in K^n$ のとき、
$x_1, \dots, x_r$ の線形結合全体のなす集合を考える。
すなわち

$$W = \{ c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r \mid c_1, \dots, c_r \in K \} . \qquad (1)$$

☆このとき、W は K^n の部分空間をなす!

定理 5.3 (上の式 (1) で定まる) $x_1, \dots, x_r$ の線形結合全体のなす集合 W は K^n の部分空間をなす。

Proof 部分空間の定義より、W が以下の性質をみたすことを示す。

(SS 0)	$W \neq \emptyset$.
(SS 1)	$\forall x, \forall y \in W$ に対し $x + y \in W$.
(SS 2)	$\forall x \in W$, $\forall \lambda \in K$ に対し $\lambda x \in W$.

(SS 0) 上の式 (1) において $c_1 = \cdots = c_r = 0$ とおくと、
$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_r = \mathbf{0} \in W$. $\therefore W \neq \emptyset$

注意 V がベクトル空間 $\Rightarrow \mathbf{0} \in V$.

(SS 1)
$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r, & c_1, \dots, c_r \in K, \\ y = c_1' x_1 + \cdots + c_r' x_r' & c_1', \dots, c_r' \in K \end{cases} \qquad (2)$$
のとき、
$$x + y = (c_1 + c_1') x_1 + \cdots + (c_r + c_r') x_r' \in W .$$

(SS 2) 式 (2) の x と $\lambda \in K$ に対して
$$\lambda x = (\lambda c_1) x_1 + \cdots + (\lambda c_r) x_r \in W .$$

以上より、W は K^n の部分空間。 ∎

定義 (上の式(1)によって定まる) $x_1, \dots, x_r$ の線形結合全体のなす K^n の部分空間 W を、$x_1, \dots, x_r$ によって生成される、または張られる部分空間といい、

$\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ で表す。また、$x_1, \dots, x_r$ を W の生成系という。 ☒

命題 W: K^n の部分空間。
$x_1, \dots, x_m \in W$ のとき、
$\langle x_1, \dots, x_m \rangle \subset W$.

(Proof)
部分集合の定義より、$x \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle \Rightarrow x \in W$ を示す。

$x \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle = \{ c_1 x_1 + \dots + c_m x_m \mid c_1, \dots, c_m \in K \}$

より、$\exists c_1', \dots, c_m' \in K$ s.t. $x = c_1' x_1 + \dots + c_m' x_m$

$x_1, \dots, x_m \in W$ より $x = c_1' x_1 + \dots + c_m' x_m \in W$.

ゆえに 命題が示された。 ☒

☆ $\mathrm{Im} f$ は基本ベクトルの像によって生成される。

定理 5.4 $f: K^n \longrightarrow K^m$: 線形写像。
$e_1, \dots, e_n \in K^n$: 基本ベクトル。

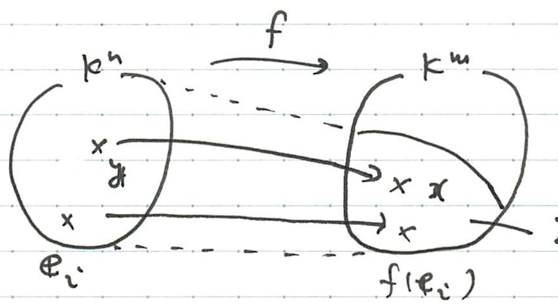
このとき、$\mathrm{Im} f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$.

集合の相等 (=) の定義より
① $\mathrm{Im} f \subset \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$.
③ $\mathrm{Im} f \supset \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$
を示す。

① $\mathrm{Im} f \subset \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x \in \mathrm{Im} f \Rightarrow x \in \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$ を示す。

$x \in \mathrm{Im} f = \{ f(y) \mid y \in K^n \}$ より,

$\exists y \in K^n$ s.t. $x = f(y)$.



このとき, $\exists c_1, \dots, c_n \in K$
s.t.
$y = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$.

ゆえに
$x = f(y) = f(c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n)$

$= c_1 f(e_1) + \cdots + c_n f(e_n) \in \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$.

したがって $\mathrm{Im} f \subset \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$.

② $\mathrm{Im} f \supset \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$
def ⟺ $x \in \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle \Rightarrow x \in \mathrm{Im} f$ を示す.

$\exists d_1, \dots, d_n$ s.t. $x = d_1 f(e_1) + \cdots + d_n f(e_n)$
$= f(\underbrace{d_1 e_1 + \cdots + d_n e_n}_{= y})$ とおくと

$x = f(y)$. ∴ $x \in \mathrm{Im} f$.

以上より定理が示された. ▨

⑪ 数ベクトル空間（部分空間）の基底と次元

$K^n \supset W = \langle \underbrace{x_1, \dots, x_r} \rangle$.

- $x_1, \dots, x_r$ が線形独立 ⟹ $x_1, \dots, x_r$ は W の基底.
- W の基底となるベクトルの個数 r は基底のとり方によらず一定. (→ 定理 2.6: 数ベクトル空間の場合) (教科書 p. 48, ノート p. 69)

定義 (次元)

数ベクトル空間(またはその部分空間) W が r 個のベクトルからなる基底をもつとき、rを Wの次元 といい、$\dim V$ で表す。

注意 数ベクトル空間 K^n に対し、$\dim K^n = n$.
(定理 2.6) (教科書 p.48、ノート p.69.)