1 ジェネリック構造

３学期は有限構造の貼り合わせによって無限構造を作る方法について述べる．こうしてできる構造はジェネリック構造（generic structure）とよばれる．

1.1 ランダムグラフ

最初に例としてランダムグラフについて述べる．一般論はその後で展開する．以下しばらく $R(*.*)$ は２変数述語記号とする．

定義 1 (グラフ)**.** $\{R\}$-構造 G は次の条件を満たすとき，グラフと呼ばれる：

1. R は対称である．$G \models \forall x \forall y [R(x,y) \to R(y,x)]$
2. R は非反射的である．$G \models \forall x [\neg R(x,x)]$

注意 2. 上の定義では，関係 $R(a,b)$ が成り立つ２点 a,b は結ばれていると思う．我々のグラフは辺に向きのないグラフである．また２点を結ぶ辺は高々１本であり，自分自身を結び付ける辺はない．

定義 3 (ランダムグラフ)**.** グラフ G は次の条件 $(*)_{mn}$ （$m,n \in \omega$; $m+n \geq 1$）をすべて満たすとき，ランダムグラフとよばれる．

$(*)_{mn}$ 異なる $m+n$ 個の点 $a_1,...,a_m \in G$, $b_1,...,b_n \in G$ に対して，a_i たちとは結ばれていて，b_j たちとは結ばれていない点 $c \in G$ が存在する．

各 $(*)_{mn}$ は論理式で表現できることに注意する．グラフであることを主張する論理式とすべての $(*)_{mn}$ をあわせてランダムグラフの公理（理論）とよぶ.

ランダムグラフは（存在すれば）無限グラフでなければならないことはわかる．しかし本当にランダムグラフは存在するのだろうか？

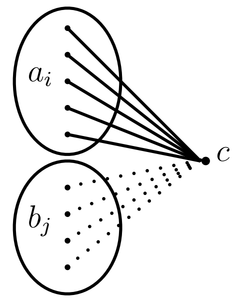


図 1: 公理 $(*)_{54}$

命題 4. ランダムグラフが存在する．

証明. 有限グラフの拡大列 G_i $(i \in \omega)$ を帰納的に以下の条件 (i) を満たすように作る：

(i) $A,B \subset G_i$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たせば,

$$G_{i+1} \models \bigwedge_{a \in A} R(a, g_{AB}) \wedge \bigwedge_{b \in B} \neg R(b, g_{AB})$$

となる $g_{AB} \in G_{i+1}$ が存在する．

このとき，$\bigcup_{i\in\omega} G_i$ が求めるランダムグラフになる． $\square$

命題 5. ランダムグラフはすべての有限グラフを部分構造として埋め込む．

証明. G をランダムグラフとして，$H = \{h_1, ..., h_n\}$ を有限グラフとする．h_i たちを順に G の中に部分構造として埋め込む（埋め込んだ先を g_i とする）．h_1 の行く先は G の勝手な元 g_1 とする．いま

$$h_1, ..., h_i \mapsto g_1, ..., g_i$$

まで部分構造としての埋め込みが得られたとする．このとき，$h_{i+1} \in H$ の行く先を決定する．ならべ替えにより，$h_1, ..., h_j$ は h_{i+1} と結ばれていて，$h_{j+1}, ..., h_i$ は h_{i+1} と結ばれていないと仮定できる．このとき，G がランダムグラフの公理を見たすので，g_{i+1} を $g_1, ..., g_j$ とは結ばれていて，$g_{j+1}, ..., g_i$ とは結ばれていないようい選べる．したがって，$h_1, ..., h_i, h_{i+1} \mapsto g_1, ..., g_i, g_{i+1}$ も部分構造としての埋め込みとなった． $\square$

注意 6. 上と同じ論法により，ランダムグラフはすべての可算グラフも埋め込む．

定義 7 (可算範疇性)**.** T を理論とする．T の可算モデルが同型を除いてただ一つ存在するとき，T は可算範疇的（$\aleph_0$-*categorical*）とよばれる．

命題 8. ランダムグラフの公理は $\aleph_0$-*categorical* である．

証明. 有限グラフの埋め込みの証明では像を順に作っていった．今度は像だけでなく原像も作ってゆく．G, G' を二つの可算ランダムグラフとする．$G = \{g_i : i \in \omega\}$,$G' = \{g'_i : i \in \omega\}$ とならべておき，i が偶数のときは g_i の行く先となる G' の元を決め，i が奇数のときは，g'_i にゆくべき G の元を決めてゆく．決めかたは有限グラフの埋め込みの場合と同じである． $\square$

注意 9. 上の可算範疇性から，ランダムグラフの公理系は完全であることがわかる．

1.2 確率論的ランダムグラフ

$I_n = \{0, ...n-1\}$ とする．I_n 上に次のようにグラフを確率的に定義する：I_n の 2 点集合 $\{a, b\}$ に対して，コインを投げて，表が出たとき a, b を辺で結び，裏が出たときには結ばない．すべての 2 点集合に対してこの操作を行って，グラフを作る．ただしコインの表が出る確率は（n によらず一定で）p $(0 < p < 1)$ とする．

命題 10 (0-1 法則)**.** φ を R-論理式とする．G をランダムグラフとする．また I_n は上のように作った確率論的ランダムグラフとする．このとき次は同値である：

1. $G \models \varphi$*;*

2. $\lim_{n\to\infty} Pr(I_n \models \varphi) = 1$*.*

証明.

主張 A. ランダムグラフの公理 $(*)_{k,m}$ は漸近的に確率 *1* で成立する．$\lim_{n\to\infty} Pr(I_n \models (*)_{k,m}) = 1$.

$\neg(*)_{k,m}$ の成立する確率が漸近的に確率 0 になることを示す．$A, B \subset I_n$ が $\neg(*)_{k,m}$ を示す証拠となる確率は α は

$$Pr(\bigwedge_{i\in I_n} \neg(\bigwedge_{a\in A} R(i,a) \wedge \bigwedge_{b\in B} \neg R(i,b))$$

である．また α は

$$\alpha \leq (1-p^k(1-p)^m)^n$$

なる不等式を満たす．$\beta = 1-p^k(1-p)^m$ は 1 より小さな定数である．また A, B の選び方方は全体で n^{k+m} で抑えられる．よって $\neg(*)_{k,m}$ が I_n で成立する確率は

$$\beta^n \cdot n^{k+m}$$

で抑えられ，その値は $n \to \infty$ のときに 0 に収束する．

$1 \Rightarrow 2$: $G \models \varphi$ とすれば，φ は有限個の $(*)_{k,m}$ たちから導かれる．各 $(*)_{k,m}$ は漸近的に確率 1 で成立するので，φ も漸近的に確率 1 で成立する．

$2 \Rightarrow 1$: $G \not\models \varphi$ とすれば，$G \models \neg\varphi$ である．したがって，上のことから，$\neg\varphi$ の漸近確率は 1 となる．よって φ の確率は 0 となる．

□

問題 11. 次の各論理式が漸近的に確率 *1* で成立するかどうかを調べよ．

1. お互いに辺で結ばれていない *100* 個の点が存在する．

2. 任意の *2* 点は，ある共通な点と辺で結ばれている．

1.3　一般化

さて一般論に移ろう．以下では，L は述語記号だけからなる有限言語とする．有限 L-構造全体を $\mathcal{K}$ であらわし，$K \subset \mathcal{K}$ とする．便宜上 $\emptyset$ も有限 L-構造とみなす．K は以下の条件を満たすものとする．

- $\emptyset \in K$,
- $A \in K$, $A_0 \subset A$ ならば $A_0 \in K$.

K は（K に属するもので同型なものは同一視すれば）可算集合になっていることに注意しておく．以下において $A \in K$ とは A と同型なものが K に属するという意味である．

定義 12. K が融合性（*Amalgamation Property, AP* と略す）を持つとは，$A \subset B$, $A \subset C$ で $B, C \in K$ ならば，次の条件を満たす $D \in K$ が存在する：

1. B は D の中に A を固定する同型によって埋め込まれる．($\exists \sigma : B \to D$（埋め込み） *s.t.* $\sigma | A = \mathrm{id}_A$)；
2. C は D の中に A を固定する同型によって埋め込まれる．

このような D を B と C の A 上の融合とよぼう．

例 13.

1. $K = \mathcal{K}$ は AP を持つ．$A \subset B, C \in K$ が与えられたとき，$B \cap C = A$ となるように点をずらしておく．集合 $D = B \cup C$ を以下のように L-構造にする：$P \in L$ のとき，$P^D = P^B \cup P^C$ とする．すなわち，P の解釈はもともとの構造の上にあったものだけとする．明らかに D は B や C を（A 上）埋め込む．(上の融合 D を $B \oplus_A C$ とかく．)
2. グラフ G 内の点 a がどの点とも結ばれていないとき，孤立点と呼ぼう．K を孤立点が n 個以下の有限グラフ全体とする．このとき，K は AP を持つ．しかし $A \subset B, C$ に対して，単純に融合 $B \oplus_A C$ を作ると，孤立点が増えるかも知れない．そこで，融合をするときに,「節約して」行う必要がある．$B_0 \subset B$ と $C_0 \subset C$ を A 上同型になる極大な部分グラフたちとする．A 上の同型による同一視により，$B_0 = C_0 (= A^*)$ と仮定できる．$B \oplus_{A^*} C$ を作れば，この中に孤立点は $n+1$ 個はない．実際，孤立点が $n+1$ 個に増えたとすれば,（B, C それぞれの中には n 個以下なので）孤立点 $b \in B \setminus A^*$, $c \in C \setminus A^*$ が存在する．このとき，b と c は A^* 上同型である．これは A^* の極大性に反する．(この例は条件「$A_0 \subset A \in K \Rightarrow A_0 \in K$」は満たさない.)

定理 14. K がＡＰを持てば，L-構造 M で次の条件をすべて満たすものが存在する．

1. M は可算である．
2. $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ のとき，$A \in K$ である．

3. $A \subset M$，$A \subset B \in K$ のとき，B と A 上同型なコピー $B' \subset M$ が存在する．

証明. K は可算無限としてよい．$\{(A_i, B_i) : i \in \omega\}$ を $A \subset B \in K$ なる対 (A, B) 全体をならべたものとする．また同じ対がこの並びの中に無限回現れると仮定する．K に属する有限 L-構造の拡大列 M_i $(i \in \omega)$ を帰納的に作る．$M_0 = \emptyset$ からはじめて，M_i まで構成されたとする．このとき，A_i と同型な M の部分構造全体を一列にならべて，$A_i^0, ..., A_i^m$ とする．これらに対応して，B_i のコピー $B_i^0, ..., B_i^m$ をとる．最初に M_i と B_i^0 の A_i^0 上の融合をとる．次にこの融合と B_i^1 の A_i^1 上の融合をとる．以下同様に，B_i^j たちを次々に融合してゆく．最後に B_i^m と融合した結果を $M_{i+1} \in K$ とする．

$M = \bigcup_{i\in\omega} M_i$ とすれば，条件１，２は明らかに成立する．条件３について考えよう．$A \subset M$, $A \subset B \in K$ のとき，対 (A, B) と等しい (A_i, B_i) がある．したがって，B と同型な B' が M_{i+1} の中に存在する． □

注意 15. 上の定理の条件 1-3 を満たす M を K-generic という．K-generic な L-構造は同型を除いてただ一つである．証明は往復論法による：M, N を定理の条件を満たす L-構造とする．$M = \{a_i\}_{i\in\omega}$, $N = \{b_i\}_{i\in\omega}$ と一列に並べておく．可算性（条件１）からこれは可能である．$\sigma_0 = \emptyset$ から始めて，M から N への部分同型 σ_i を次の条件を満たすように作ってゆく：

1. $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset ... \subset \sigma_i \subset \sigma_{i+1} \subset ...$
2. i が奇数のとき，$\mathrm{dom}(\sigma_{i+1}) \ni a_i$;
3. i が偶数のとき， $\mathrm{ran}(\sigma_{i+1}) \ni b_i$.

σ_i まで出来たと仮定する．i は奇数と仮定してよい．このとき，$A = \mathrm{dom}(\sigma_i)$, $A' = \mathrm{ran}(\sigma_i)$, $B = A \cup \{a_i\}$ とする．条件２により，$B \in K$ である．また，$A \cong A'$ から，この同型による同一視により，$A' = A$ と思ってよい．条件３から $B' \in K$ を $B \cong_A B'$ となるように選ぶことができる．この同型写像を σ_{i+1} とすればよい．(偶数のときも同様である.）最終的に $\sigma = \bigcup_{i\in\omega} \sigma_o$ が M と N の同型を与える．

例 16. 可算のランダムグラフは $K = \{$ 有限グラフ全体 $\}$ に対する K-generic structure になっている．実際にランダムグラフの公理は K-generic の条件３を意味している．

1.4 K-ジェネリック構造（順序を持つ K）

以下の議論は筑波で行なわれた池田氏の講演を参考にしている．K は有限 L-構造のあるクラスとする．$\emptyset \in K$ および部分構造で閉じていることは今回も仮定する．ま

た同型なものを同一視することにより，K は可算としてよく，$A \in K$ は A と同型なものが K に属することを意味する．K 上の擬順序 $\leq$ は包含関係の順序 $\subset$ を強めたもので，さらに次の条件を仮定する：任意の $A, B, C \in K$ に対して，

1. $\emptyset \leq A \leq A$;
2. $A \leq C,\ A \subset B \subset C\ \Rightarrow\ A \leq B$;
3. $A \leq B,\ \Rightarrow\ A \cap C \leq B \cap C$.
4. $B(\supset A)$ が $A \leq B$ を満たさない中で極小のとき，$A \subset_{\min} B$ とかくことにすると，$\subset_{\min}$ に関する無限上昇列は存在しない．

注意 17. $\subset$ 自体は上の $\leq$ に対する条件をすべて満たすことに注意する．

定義 18. L-構造 M が次の条件を満たすとき，*K-generic* であるといわれる．

1. M は可算である；

2. $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ のとき，$A \in K$ である；

3. $A \leq M$, $A \leq B$ ならば B と A 上の同型なコピー $B' \leq M$ が存在する．($\exists B' \leq M$ *s.t.* $B \cong_A B'$.)

ただし，$A \leq M$ は A を含む任意の M の有限部分について $A \leq M$ が成り立つことである．

$A \leq B$ のとき，A を B の strong submodel ということがある．この言葉を使えば，条件 2 の結論部分は「B を M の strong submodel として A 上埋め込むことができる」と表現される．このような K-generic が存在するための K の条件を与えたい．

定義 19. K が AP を満たすとは，

(*) $A \leq B \in K$, $A \leq C \in K$ ならば $D \in K$ と $B' \leq D$, $C' \leq D$ で $B \cong_A B'$, $C \cong_A C'$ となるものが存在する．(B,C を D の *strong submodel* として A 上埋め込むことができる．)

定理 20. K が AP を持てば，K-ジェネリック構造 M がただ一つ存在する．

証明. 存在証明は定理 14（$\leq$ が $\subset$ のとき）とほとんど同じである（条件 1-3 および AP による）．

K-ジェネリック構造が同型を除いて一つしかないことは次のように示される：このために，K の条件 4 が必要になってくる．M と N を二つの K-ジェネリック構造とする．この二つの間の有限部分同型 $\sigma_n : A_n \to B_n$ を

- $\emptyset = \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots;$
- $A_n \leq M,\ B_n \leq N;$
- $M = \bigcup_{n\in\omega} A_n,\ N = \bigcup_{n\in\omega} B_n.$

となるようにとってゆく（往復論法）．このとき，$A_n(B_n)$ が単なる有限部分構造でなく，$A_n \leq M$（$B_n \leq N$）を満たしていることが重要となる．そのために，与えられた有限の $A \subset M$ に対して $A \subset C \leq M$ となる有限の $C \in K$ の存在が言えればよい．条件 4 があれば大丈夫である．実際 A から始めて M の有限部分構造による $\subset_{\min}$- 上昇列 $\{C_i\}_{i\leq n}$ を極大にとるとき，$C_n \leq M$ でなければならない． □

2　局所次元によって定義されるクラス

以下しばらくの間，R を n-変数述語記号として，$L = \{R\}$ とおく．$A, B, ...$ などは有限で対称な L-構造を表すとする．すなわち，A においては，

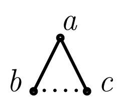
$$A \models R(a_1, ..., a_n) \iff A \models R(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$$

が任意の permutation $\sigma \in Sym(\{1, ..., n\})$ に対して成立すると仮定する．A の局所次元（あるいは predimension）と呼ばれる $\delta(A)$ を以下の式で定義する：

$$\delta(A) = |A| - |R^A|,$$

ただし，R^A は A において R を満たす点列の（permutation を除いた）全体を表す．（点列 $(a_1, ..., a_n)$ と $(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$ は同一視する．）

例 21. R を *2* 変数とする．グラフは対称 R-構造とみなせる．$A = \{a, b, c\}$ として，a と b および a と c が辺でつながれているとする．



このとき，δ は「点の数」−「辺の数」で与えられるので，$\delta(A) = 3 - 2 = 1$ である．

定義 22 (相対局所次元)**.** $\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$.（ただし，$AB$ は $A \cup B$ の略記である．今後この略記は常に使う.）

補題 23. *1.* $\delta(A/B) = \delta(A \setminus B) - |R(A \setminus B, B)|$．ただし $R(A \setminus B, B)$ は R を満たす AB 内の点列で，$A \setminus B$ と B の両方にまたがるもの全体を示す.

特に $A \cap B = \emptyset$ のときは，$\delta(A/B) = \delta(A) - |R(A, B)|$.

2. $A \cap B = \emptyset$, $B_0 \subset B$ のとき，$\delta(A/B) \le \delta(A/B_0)$.（単調性））

証明. 1. $\delta(A/B) = |AB| - |R^{AB}| - (|B| - |R^B|) = |A - B| - (R^{AB} - R^B)$ である．また，$R^{AB} = R^{A \setminus B} \cup R^B \setminus R(A \setminus B, B)$ である．よって，

$$\delta(A/B) = \delta(A \setminus B) - |R(A \setminus B, B)|.$$

2. 1 により，$\delta(A/B) = \delta(A) - |R(A,B)|$, $\delta(A/B_0) = \delta(A) - |R(A,B_0)|$. しかし $R(A,B) \ge R(A,B_0)$ だから結論の式を得る． □

定義 24. $A \subset B$ に対して，$A \le B \iff \forall C (A \subset C \subset B \Rightarrow \delta(C/A) \ge 0)$

上の定義は $X \subset B \setminus A$ に対して，$\delta(X/A) \ge 0$ が常に成り立つこととしても同値になる.（当たり前）

さてこの $\le$ を使って，有限 L-構造のクラス K を

$$K = \{A : \delta(A_0) \ge 0 \ (\forall A_0 \subset A)\}$$

と定義する．すなわち，どんな部分集合も局所次元が 0 以上になっているもの全体である．全章と同様に $\emptyset$ も $\delta(\emptyset) = 0$ の L-構造と考える．

補題 25. $\le$ は K 上の順序であり，この順序のもとに K は前章の K に科せられた条件 *1-4* を満たす.

1. $\emptyset \le A \le A;$

2. $A \le C$, $A \subset B \subset C \ \Rightarrow \ A \le B;$

3. $A \le B$, $\Rightarrow \ A \cap C \le B \cap C.$

4. $\subset_{\min}$ に関する無限上昇列は存在しない.

証明. 最初に $\le$ が推移律を満たすことを示そう．$A \le B \le C$ とする．$X \subset B \setminus A$, $Y \subset C \setminus B$ とする．$\delta(XY/A) \ge 0$ を示せばよい．これは次のように示せばよい：$\delta(XY/A) = \delta(XYA) - \delta(XA) + \delta(XA) - \delta(A) = \delta(Y/XA) + \delta(X/A) \ge \delta(Y/B) + \delta(X/A) \ge 0 + 0$.

1,2 は明らかである．

3. $X \subset B \cap C \setminus A$ とする．このとき，$\delta(X/A \cap C) \ge \delta(X/A) \ge 0$ である．最初の不等号は単調性，次の不等式は $A \le B$ による．

4. $A \subset_{\min} B$ ならば，$\delta(B)$ は $\delta(A)$ より 1 以上小さい．したがって，もし A から始まる K の元の無限列が存在したとすれば，次元が 1（以上）ずつ減っていくのでいつかは負になる．この構造は，K に属さないので矛盾． □

注意 26. 1. $p \in \mathbb{Q}^+$ とするとき，$\delta(A)$ を $|A| - p|R^A|$ で定義してクラス K を作る（今までの議論は $p = 1$ に対応する）．このときも 1-4 は成立する．1-3 が成立することは明らかである．4 は，$p = n/m$ とするときに，局所次元が $1/m$ の倍数になっていることからわかる．

2. K の部分クラスも 1-4 の条件を満たす．これは 1-4 の条件は「任意の K の元に対して」という形をしているためである．

3. $A, B, C \in K$ が $A = B \cap C$ を満たすとき，

$$BC = B \oplus_A C \iff \delta(BC) = \delta(B) + \delta(C) - \delta(A).$$

$R^{BC} = (R^B \cup R^C) \sqcup \{X \in R^{BC} : X \setminus B \neq \emptyset, X \setminus C \neq \emptyset\}$ (disjoint union) になっていること注意する．また $|R^B \cup R^C| = |R^B| + |R^C| - |R^A|$ および $|BC| = |B| + |C| - |A|$ が成立している．δ の定義式を思いだせば，同値性が成立するのは明らかである．

命題 27. K は AP を持つ．

証明. $A \leq B, C \in K$ とする．このとき $B \oplus_A C \in K$ を示す．$X \subset B \oplus_A C$ として，$\delta(X) \geq 0$ を示せばよい．

$$\delta(X) = \delta(X/X \cap C) + \delta(X \cap C/X \cap A) + \delta(X \cap A)$$

に注意する．このとき，右辺第一項は，

$$\begin{aligned}
\delta(X/X \cap C) &= \delta(X \setminus C) - |R(X \setminus C, X \cap C)| \\
&= \delta(X \setminus C) - |R(X \setminus C, X \cap A)| \quad (\text{free の条件}) \\
&= \delta(X \setminus C/X \cap A) \quad (\text{相対局所次元の計算公式}) \\
&\geq 0 \quad (A \leq B)
\end{aligned}$$

となる．第 2 第 3 項も同様の計算で ≥ 0 となることがわかり，$\delta(X) \geq 0$ が結論される． □

定理 28. $K = (K, \leq)$ の部分クラス K_0 が条件 *1-4* を満たし AP を持つとする．ただし $\leq$ は局所次元によって定義されているとする．このとき，K_0-*generic* な構造が唯一つ存在する．

証明. 定理 20 による． □

2.1 局所次元と次元

復習 : 前章と同様に R を述語記号として，対称な有限 R-構造のクラス $\mathcal{K}$ を考える．$\alpha \in [0,1]$ を固定して，$A \in \mathcal{K}$ に対して，

$$\delta(A) = |A| - \alpha |R^A|$$

を局所次元とする．ただし R^A は R を満たす A の部分集合の全体である．$\mathcal{K}$ 上に関係 $\leq$ を

$$A \leq B \iff A \subset B \ \ \& \ \ \delta(X/A) \geq 0 \ (\forall X \subset B \setminus A)$$

で定義する．ただし，相対局所次元は $\delta(X/A) = \delta(XA) - \delta(A)$ で与えられている．

$$K = \{A \in \mathcal{K} : \emptyset \leq A\}$$

は AP を持ち，K-generic 構造が存在する．$K_0 \subset K$ が部分構造について閉じていて AP を持てば，同じく K_0-generic 構造 M が存在する．このような K_0 と M を一つ固定して考える．また $\subset_{min}$-上昇列は存在しないと仮定する．このとき，M は同型を除いて一意に決まる．

以下では $N \equiv M$ なる N の中で議論する．N の有限部分集合 A に対して，A の次元を

$$d(A) = \inf\{\delta(A') : A \subset A' \subset_{\mathrm{fin}} N\}$$

で定義する．

補題 29. *1.* $A \subset_{\mathrm{fin}} N$ に対して，$A \subset B \leq N$ [1]となる最小の B が存在する．この B を $\overline{A}$ とかき，A の *closure* とよぶ．

2. $d(A) = \delta(\overline{A})$.

証明. 1. $\subset_{min}$ に関する無限上昇列が存在しないので，$A \subset B \leq N$ となる有限の B が存在する．B' も $A \subset B' \leq N$ となったとする．このとき，$B \cap B' \leq B' \leq N$ [2]となる．したがって，最小の B が存在する．

2. $\delta(\overline{A})$ よりも小さい値を持つ $B \supset A$ が存在すれば，$\overline{B}$ は $\overline{A}$ の拡大ではない．よって $\overline{A} \cap \overline{B} \leq N$ が $\overline{A}$ の最小性に反する． □

定義 30. *1.* X が無限集合のときは $\overline{X} = \bigcup\{\overline{A} : A \subset_{\mathrm{fin}} X\}$ とする．

[1] $B \leq N$ の意味は，任意有限の $X \subset N$ に対して $B \leq BX$ となることである．

[2] $B \leq N$ より $B \cap B' \leq N \cap B' = B'$ である．補題 25 を用いる．

2. A が *closed* $\iff \overline{A} = A$.

注意 31. *1.* $A \subset \overline{A}$.

2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

3. $A \subset B \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$: $\overline{\overline{A}}$ は $\overline{A}$ を含む最小の *closed set.* $\overline{A}$ 自体が *closed* なので $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

補題 32. 各 $n \in \omega$ に対して，$\{a_1, ..., a_n\} \leq N \iff \varphi_n(a_1, ..., a_n)$ となる論理式 φ_n の存在を仮定する．このとき，$A, B \leq N$ が同型であれば，$\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(B)$ である．

証明. A, B が有限の場合に示せばよい．N が generic 構造 M であれば，A を B に移す M の自己同型写像が存在する（往復論法）．よって M 上では補題の主張は成立する．また A が closed であることは論理式で表現できているので，$N \equiv M$ においても，補題の主張は成立する． □

定義 33 (相対次元)**.** 相対次元も δ のときと同様に，

$$d(a/A) = d(\{a\} \cup A) - d(A)$$

で定義する．X が無限のときは inf で定義する．すなわち，$d(a/X) = \inf\{d(a/A) : A \subset_{\mathrm{fin}} X\}$.

補題 34. （単調性）

1. $a \subset b$ のとき，$d(a/C) \leq d(b/C)$.

2. $A \subset B$ のとき，$d(a/A) \geq d(a/B)$

証明. 1. $\overline{aC} \leq \overline{bC}$ より明らか.

2. 最初に A, B を有限と仮定する．このとき，B は closed としてよい．

$$\begin{aligned}
d(a/A) &\geq \delta(\overline{Aa}) - \delta(\overline{Aa} \cap B) \quad (\overline{A} \leq \overline{Aa} \cap B) \\
&= \delta(\overline{Aa} - B/\overline{Aa} \cap B) \quad (\text{相対局所次元の定義}) \\
&\geq \delta(\overline{Aa} - B/B) \quad (\text{局所次元の単調性}) \\
&= \delta(\overline{Aa}/B) \quad (\text{相対局所次元の定義}) \\
&\geq d(a/B) \quad (aB \subset \overline{Aa}B \subset \overline{aB}).
\end{aligned}$$

有限の場合の単調性から，相対次元の定義 $d(a/X) = \inf\{d(a/A) : A \subset_{\mathrm{fin}} X\}$ は X が有限の場合にも成立することに注意しておく．A, B が一般の場合は $\inf\{d(a/C) : C \subset_{\mathrm{fin}} A\} \leq \inf\{d(a/C) : C \subset_{\mathrm{fin}} B\}$ を示すことになるが，これは集合の包含関係から明らかである． □

補題 35. 有限集合 A, B, C が *closed* で $A = B \cap C$ とする．このとき次の *2* 条件は同値である．

1. $d(B/C) = d(B/A)$

2. $B \cup C$ は *closed* で，B と C は A 上 *free* である（$BC = B \oplus_A C \leq N$）．

証明. $1 \Rightarrow 2$: $d(B \cup C) = d(B/C) + d(C) = d(B/A) + d(C) = d(B) + d(C) - d(A) = \delta(B) + \delta(C) - \delta(A)$ が成立している．また関係の数を数えることにより，一般に $\delta(B) + \delta(C) - \delta(A) \geq \delta(B \cup C)$ がわかる．よって $d(B \cup C) \geq \delta(B \cup C)$ を得る．これは $B \cup C$ が closed を示す．さらに等号 $\delta(B) + \delta(C) - \delta(A) = \delta(B \cup C)$ が成立することから B, C が A 上で free になることもわかる．

$2 \Rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} d(B/C) &= \delta(BC/C) \quad (BC\text{: closed}) \\ &= \delta(B \setminus A/C) \\ &= \delta(B \setminus A/A) \quad (B \text{ と } C \text{ が } A \text{ 上 free}) \\ &= d(B/A). \end{aligned}$$

□

補題 36. 有限集合 A, B, C を *closed* として，

$$BC = B \oplus_A C \leq N$$

を仮定する．このとき，$A \leq B_0 \leq B$, $A \leq C_0 \leq C$ に対して，B_0C_0 は *closed* である．

証明. B_0C が closed になることを示せばよい．B_0C が closed でなければ，(BC は closed なので) $\delta(X/B_0C) < 0$ となる集合 $X \subset B \setminus B_0$ が存在する．B, C は B_0 上でも free なので，

$$\delta(X/B_0C) = \delta(X/B_0)$$

である．このことは，$B_0 \not\leq B_0X$ を示し，$B_0 \leq B$ に矛盾する．□

補題 37. 有限集合 A, B, C が *closed* で $A = B \cap C$ とする．$d(B/C) = d(B/A)$ ならば，任意の部分集合 $B_0 \subset B$ に対しても，$d(B_0/C) = d(B_0/A)$ が成立する．

証明. B_0 は $A \subset B_0$ を満たし，なおかつ closed であると仮定してよい．このとき，

$$\begin{aligned} d(B_0/A) &= \delta(B_0/A) \quad (B_0\text{: closed}) \\ &= \delta(B_0/C) \quad (B, C \text{ が } A \text{ 上 free}) \\ &= d(B_0/C) \quad (B_0C\text{: closed}). \end{aligned}$$

$\square$

注意 38. 補題 *35* は B, C が無限のときも成立する：

(*) A, B, C を *closed* として，$B \cap C = A$ とする．各有限の $B_0 \subset B$ に対して，$d(B_0/C) = d(B_0/A)$ が成立すれば，$B \cup C$ は *closed* である．

有限集合 $B_0 \subset B$, $C_0 \subset C$ が与えられたとき，$D = \overline{B_0C_0}$ が BC に含まれることを示せばよい．

ここで B_0, C_0 は *closed* と仮定できる（B_0 のかわりに $B \cap D$，C_0 のかわりに $C \cap D$ を考える）．$\hat{D} = D \setminus BC$ が空でないと仮定して矛盾を導く．このとき，$-2\varepsilon := \delta(\hat{D}/B_0C_0) =< 0$ でなければならない[3]．次に $A_0 \leq_{\text{fin}} A$ を十分大きく選んで，$d(B_0/A_0) < d(B_0/A) + \varepsilon$, $d(C_0/A_0) < d(C_0/A) + \varepsilon$，とする．このとき，矛盾する二つの不等式が導かれる：

$$
\begin{aligned}
d(B_0C_0/A_0) &\geq d(B_0C_0/A) \\
&= d(B_0/AC_0) + d(C_0/A) \quad \text{（単調性より } A \text{ が無限でもよい）} \\
&= d(B_0/A) + d(C_0/A) \quad \text{（仮定 } (*)\text{）} \\
&> d(B_0/A_0) + d(C_0/A_0) - 2\varepsilon \\
&\geq \delta(B_0/A_0) + \delta(C_0/A_0) - 2\varepsilon \\
&\geq \delta(B_0C_0/A_0) - 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

一方で，$\delta(\hat{D}/B_0C_0A_0) \leq -2\varepsilon$ と $\delta(\hat{D}/A_0) \geq 0$ により，

$$
\begin{aligned}
d(B_0C_0/A_0) &\leq \delta(\hat{D}B_0C_0/A_0) \\
&= \delta(B_0C_0/A_0) + \delta(\hat{D}/B_0C_0A_0) \\
&\leq \delta(B_0C_0/A_0) - 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

3 Hrushovski の例

$\aleph_0$-categorical stable pseudoplane が存在することを示そう．この例から $\aleph_0$-categorical で merely stable な理論の存在がわかる．最初に擬平面の定義を復習しておく：$(P, L, \in)$ が擬平面（P が点の集合，L が直線の集合，そして $p \in l$ は直線が線の上にあることを意味している）であるとは，

- 各点を通る無限個の直線がある；

[3] $\delta(D/B_0 \cup C_0) \geq 0$ とすれば，$B_0 \cup C_0$ を含むうちで一番 δ が下がるのが D なのに，その値が $\delta(B \cup C)$ に一致（以上）するので $B \cup C$ は closed になってしまう．

- 各直線の上に無限個の点がある；
- ２点を通る直線は高々有限個である（ないかも知れない）；
- ２直線の交点は高々有限個である（ないかも知れない）．

以下の議論は Wagner 氏の論文と池田氏の筑波での講演を参考にしてある．(もちろん Hrusovski 氏の論文がもとになっている.）この章ではグラフを２変数述語記号 R の構造と考える．R^A は R-構造 A の中で R を満たす R^2 の点の集合であるが（前章と同様に）辺の数と考えるために，$(a,b),(b,a) \in R^2$ を同一視して考えている．

実数 $\alpha \in [0,1]$ を固定して局所次元 $\delta(A)$ を $\delta(A) = |A| - \alpha|R^A|$ で定義する．$(K_f, \leq)$ は前章で $\mathcal{K}$ に科した条件１－３を満たす．４を満たすことは別に見る必要がある．(α は無理数であることに注意.）関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(0) = 0$ なる単調増加関数としておく．f によって作られる有限グラフのクラス K_f を

$$K_f = \{A : \ \delta(A_0) \geq f(|A_0|) \ \ (\forall A_0 \subset A)\}$$

で定義する．

$$A \in K_f \iff \forall A_0 \subset A,\text{ 対応する点 } (|A_0|, \delta(A_0)) \text{ は曲線 } f \text{ の上方にある}$$

に注意する．

以下で f を特定の関数として選ぶ.

f の定義:　$1/\alpha \in \mathbb{R}^+$ の有理数での下からの近似を考える．$a_\alpha(0) = 0$ として，$n \in \omega - \{0\}$ に対して，$a_\alpha(n) = k_n/m_n$ を分母が n 以下の中での最良近似とする：

$$a_\alpha(n) = \max\left\{\frac{k}{m} \in \mathbb{Q} : m \leq n,\ \frac{k}{m} \leq \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

また，f を $f(0) = 0$; 各 $n \in \omega - \{0\}$ に対して，

$$f(n) = (1 - \alpha\ a_\alpha(0)) + \cdots + (1 - \alpha\ a_\alpha(n-1))$$

と定義する．$\alpha a_\alpha(i)$ は１に近く（１以下）なので，各項は０以上の小さい数である．よって関数 f は単調増加になる．さらに近似はだんだんよくなるので，加わる各項はだんだん小さくなる．よって f は上に凸である．

補題 39. K_f は AP を持つ.

証明. $A \le B, C \in K_f$ とする．このとき直和 $B \oplus_A C$ が K_f に属すことを示す．このためには，$B \oplus_A C$ の任意の部分構造に対応する点が曲線 f より上にあることを言わなければならない．しかし，$B \oplus_A C$ の部分構造は再び直和の形になるので $B \oplus_A C$ に対応する点が f より上にあることを言えば十分．次はやさしい：

主張 A. $D = B \oplus_A C$ に対応する点はベクトル AB, AC の和に対応する点である.（四角形 $ABCD$ が平行四辺形になる点.）

今 AB の傾きが AC の傾きよりも小さいとする．このとき，D が f の上にあることを示すためには次を言えば十分である.

主張 B. AB の傾きは $f'(|B|)$ 以上である.

両辺を計算する.

- AB の傾き $= \dfrac{\delta(B) - \delta(A)}{|B| - |A|} = 1 - \alpha \dfrac{|R^B| - |R^A|}{|B| - |A|}$.
- $f'(B) = 1 - \alpha a_\alpha(|B|)$

ここで $A \le B$ より，$\frac{|R^B| - |R^A|}{|B| - |A|} \le 1/\alpha$．また $a_\alpha(|B|)$ は $1/\alpha$ の分母が $|B|$ 以下の最良の近似であるから，$\frac{|R^B| - |R^A|}{|B| - |A|} \le a_\alpha$．したがって，目的の式を得る. □

したがって，$(K_f, \le)$ には generic structure$M$ が存在する.

以下の補題のためには，f が無限大に発散していることが必要となる．無限大に発散する α の存在は後に示す.

補題 40. （f が無限大に発散するとき）$M \equiv N$ なる可算の N も *generic structure* である.

証明. このためには大まかに言って次の二つのことを言う必要がある：

- N は K_f の元から作られている；
- K_f の元を strong に埋め込む.（詳しくは generic の定義を参照のこと.）

最初の条件は論理式で書けるので $N \equiv M$ でも成立する.

２番目の条件は A が与えられたときに，一定の大きさ以上 $B \supset A$ に対しては常に $\delta(B) \ge \delta(A)$ が成立している状況ならば（すなわち，strong になっていない反例を探すのが有限の範囲でよければ）$A \le M$ を論理式でかくことができるので，$N \equiv M$ に対しても２番目の条件が成り立つ．例えば，f が単調増加で無限大に発散している場合なら大丈夫である. □

補題 41. f が無限大に発散するような $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する．

証明. f は α に依存するので，f_α とかく．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f_\alpha(n)$ を α の指標と呼ぼう．$X_m \subset \mathbb{R}$ を指標が m より大きくなる点 α の集合とする．

主張 A. X_m は *open* である．

$\alpha \in X_m$ とする．$\lim_{n\to\infty} f_\alpha(n) > m$ だから，有限の k ですでに $f_\alpha(k) > m$ となる．このような最小の k を考える．最小性により，$1/\alpha$ と $a_\alpha(k-1)$ の間には隙間がある．β が α に十分に近くて，$1/\beta$ がこの隙間に属するとき，

$$a_\alpha(i) = a_\beta(i) \quad (i = 1, ..., k-1)$$

が成立する．よって，$f_\beta(k) = \sum_{i\le k-1} 1 - \beta a_\beta(i)$ は β が α に近づくとき $f_\alpha(k)$ に近づく．したがって，十分 α に近い β に大しては $f_\beta(k) > m$ となる．($1/\beta > 1/\alpha$ のときも同様の議論.)

主張 B. X_m は *dense* である．

任意に点 p/q が与えられたとき，その点の近くに X_m の点が存在することを示せばよい．表記の簡潔性のために，$3/4 < p/q$ としておく．$N \in \omega$ を十分大きくとり，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge 2qm$$

が成り立つようにしておく．さらに R を N および q に対して十分大きくとる．

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{1}{R}$$

が X_m の元になることを示す．$n \le N$ として，指標の定義に出てくる各項を計算する（$a_\alpha(n) = k_n/m_n$, $m_n \le n \le N$, $k_n \le 4m_n/3 \le 4N/3$ に注意する）．

$$\begin{aligned}
1 - \alpha a_\alpha(n) &= \frac{1}{m_n}(m_n - \alpha k_n) \\
&= \frac{1}{m_n}\left(m_n - (\frac{p}{q} + \frac{1}{R})k_n\right) \\
&= \frac{1}{m_n}\left(\frac{qm_n - pk_n}{q} - \frac{k_n}{R}\right).
\end{aligned}$$

この値は ≥ 0 だから，最後の式の括弧の中の最初の項 $(qm_n - pk_n)/q$ は正でなければならない，よって $1/q$ 以上である．さらに，$1/m_n \ge 1/n$, であり，R が N に比して十分大きいことから，

$$\frac{k_n}{R} \le \frac{1}{2q}$$

となる．このことから，各項の値は

$$1 - \alpha a_\alpha(n) \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2q}$$

となっている．よって $f_\alpha(N) \geq \dfrac{1}{2q} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq m$ となる．

□

したがって $\bigcap_{m\in\omega} X_m$ から元 α がとれる (Baire Category Theorem)．この元は無限の指標を持ち，自動的に α は無理数となる．さらに $3/4 < \alpha < 1$ と仮定しておくことができる．(グラフが四角形を持たないことを示すために必要となる.）以下この α をもとに議論する．

M 上に「点の集合」と「線の集合」ならびに「点が線の上にある」という関係を持つ構造 $(P, L, \in)$ を定義する．

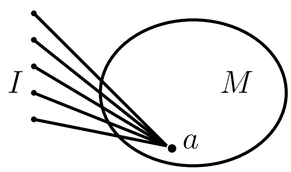
- $P = M$, $L = M$;
- $p \in l \iff R(a, b)$

補題 42. 上の構造 $(P, L, \in)$ は擬平面である．

証明. P, L が対称なので 4 つある条件のうち二つを示せばよい．最初に f の値をいくつか計算しておくと，$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2 - \alpha > 1$, $f(3) = 3 - 2\alpha$, $f(4) = 4 - 3\alpha > 4 - 4\alpha$ となる．2 点以上持つ集合 A の局所次元は 1 より大きい．したがって，1 点 a は必ず，$a \leq M$（strong）である．

主張 A. 一点 $a \in P$ を通る直線が無限個ある．

a と結ばれている n 個の元 I（I どうしは結ばれていない）をとり，グラフ aI を考える．



$a_\alpha(i) \geq 1$ により，

$$f(n+1) = 1 + (1 - \alpha a_\alpha(1)) + \cdots + (1 - \alpha a_\alpha(n)) \leq (n+1) - n\alpha = \delta(aI)$$

となることに注意すると，$aI \in K_f$ となることがわかる．また $a \leq aI$ だから I は M の中に埋め込まれる．

主張 B. *2* 点 a, b を通る直線は二つ以上ない．

もしこのような直線 l, m があれば，グラフとして，$albn$ は四角形になる．よって $\delta(albn) = 4 - 4\alpha < f(4)$ となってしまい，K_f に属さないことになる． □

最後に T が stable になることを示す．T が stable になることを示すためには，タイプの数（論理式で区別される元の最大個数）が多くないことを示せばよい．そのために準備が必要になる．十分大きい $N \equiv M$ を一つ固定してこの中で議論をする．

補題 43. $A \subset B$, A, B は *closed* とする．また次を仮定する：

- $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$,
- $d(a/B) = d(a/A)$, $d(b/B) = d(b/A)$,
- $\overline{aA} \cap B = \overline{bA} \cap B = A$.

このとき，$\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(b/B)$ である．

証明. A を固定する自己同型 $a \mapsto b$ によって $\overline{aA}$ が $\overline{bA}$ に移ることから，

$$\mathrm{tp}(\overline{aA}/A) = \mathrm{tp}(\overline{bA}/A)$$

がわかる．補題 35 および注意 38 により，$\overline{aA}\,B$, $\overline{bA}\,B$ はともに closed である．また，グラフとして同型である．補題 32 によって，$\mathrm{tp}(\overline{aA}B) = \mathrm{tp}(\overline{bA}B)$ を得る． □

定義 44.

1. λ を無限基数とする．T が λ-stable であるとは，次が成立することである：
$$|B| \leq \lambda \Rightarrow |S(B)| \leq \lambda.$$
2. T が λ-stable となる λ が存在するとき，T は stable であるという．

補題 45. $T = \mathrm{Th}(M)$ は *stable* である．

証明. $B \leq N$ を無限集合とする．B 上のタイプが少ないこと（$|B|^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}$ 以下）を最初に示す．$a \in N$ に対して，可算集合 $A \subset B$ を $d(a/B) = d(a/A)$, $\overline{dA} \cap B = A$ となるように選べる．このとき，上の補題 43 により，$\mathrm{tp}(a/B)$ は $\mathrm{tp}(a/A)$ によって決定される．よって，

$$|S(B)| \leq \text{‘可算集合 } A \subset B \text{ のとり方’} \times |S(A)|$$

である．すなわち，$|S(B)| \leq |B|^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} \leq |B|^{\aleph_0}$ である．$|B|^{\aleph_0} = |B|$ を満たす場合は $|S(B)| = |B|$ となる．特に T は $2^{\aleph_0}$-stable である． □